N° d'ordre : 2417

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

par

Christiane NORMAND - ALLE

STRUCTURES CONVECTIVES DANS LES MILIEUX CONFINES

Soutenue le 4 Mai 1981 devant la Commission d'Examen

Président E. Guyon

Examinateurs Y. Pomeau
P. Bergé
J.J. Bernard
P. Manneville
D. Levesque
J.P. Caltagirone

N° d'ordre :

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS_SUD

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES_SCIENCES PHYSIQUES

par

Christiane NORMAND - ALLE

STRUCTURES CONVECTIVES DANS LES MILIEUX CONFINES

Soutenue le 4 Mai 1981 devant la Commission d'Examen

Président E. Guyon

Examinateurs Y. Pomeau
P. Bergé
J.J. Bernard
P. Manneville
D. Levesque
J.P. Caltagirone

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Le travail qui est présenté ici est le résultat de recherches effectuées au Service de Physique Théorique à Saclay. Aussi je tiens à remercier en premier lieu Monsieur Cyrano De Dominicis qui m'a accueillie dans ce Service où de nombreuses facilités de travail m'ont été accordées.

Monsieur Yves Pomeau a dirigé mes premiers travaux de recherche et a stimulé mon intérêt pour la physique par ses conseils et son enseignement dont j'ai largement bénéficié. Je le remercie très vivement pour son aide qui m'a toujours été précieuse et lui exprime ma profonde gratitude.

Aussi souvent que possible les résultats théoriques exposés dans ce mémoire ont été confrontés à la réalité. Cela m'a conduit à travailler en étroite collaboration avec des Services expérimentaux. Je remercie tout d'abord Pierre Bergé et son équipe du Service de Physique du Solide et de Résonance Magnétique à Saclay qui m'ont toujours communiqué leurs résultats avec patience et gentillesse. Parmi les membres de cette équipe j'exprime mon amicale gratitude à Monique Dubois et José Eduardo Wesfreid qui en faisait partie au début de ma thèse.

Les expériences de convection dans l'eau qui sont à l'origine de mon étude des modes convectifs en géométrie cylindrique, ont été réalisées par Aza Azouni au Laboratoire d'Aérothermique à Meudon. La confrontation et l'interprétation de nos résultats respectifs a donné lieu à une sympathique collaboration ; que Aza Azouni trouve ici l'expression de toute mon amitié. Je suis très reconnaissante à Monsieur Le Professeur Jean Joseph Bernard qui a vivement encouragé cette collaboration.

Monsieur Paul Manneville a eu la gentillesse de lire le manuscrit avec beaucoup d'attention et un regard très critique, je le remercie très chaleureusement pour les suggestions, concernant tant la forme que le fond, qu'il m'a faites, j'ai également beaucoup apprécié les nombreuses discussions que nous avons eu ensemble depuis que nous travaillons sur des sujets voisins.

Monsieur le Professeur Etienne Guyon a accepté de présider le jury, je lui suis très reconnaissante des conseils qu'il m'a prodigués au moment de la rédaction de ma thèse et qui m'ont permis d'en améliorer la présentation.

Je remercie également Messieurs Dominique Levesque et Jean-Paul Caltagirone pour leur participation au Jury.

Je tiens à remercier Brigitte Parent qui a dactylographié le texte, elle s'est acquittée de sa tâche avec une grande compétence et beaucoup de gentillesse.

T A B L E D E S M A T I E R E S

INTRODUCTION 1

I - RAPPELS SUR L'ETUDE THEORIQUE DE LA CONVECTION EN MILIEU INFINI. 4

1. La théorie linéaire 4
2. La théorie non-linéaire 9
3. Principaux types d'instabilités 18
4. Effets critiques dans l'instabilité de Rayleigh-Bénard 20

II - LA CONVECTION EN MILIEU CONFINE - HISTORIQUE 25

III - LA CONVECTION EN GEOMETRIE CYLINDRIQUE 33

1. Motivations 33
2. Les équations générales de la convection 34
3. Modes surstables 38
4. Méthode de Galerkin 45
5. Fonction d'essai pour la vitesse 49
6. Fonction d'essai pour la température - premier exemple 56
7. Fonction d'essai pour la tempérarure - deuxième exemple 77

IV - "THERMOCONVECTIVE INSTABILITY OF WATER BETWEEN 0° AND 4°C" 82
par M. Azouni et C. Normand .....

V - LA CONVECTION EN GEOMETRIE RECTANGULAIRE 120

1. La convection dans les boîtes de grandes dimensions hori- 120
   zontales .....
2. L'apparition de la turbulence dans les grandes boîtes 121
3. Structures convectives stationnaires dans les boîtes rectan- .
   gulaires de grandes dimensions horizontales 124

VI - CONVECTIVE FLOW PATTERNS IN RECTANGULAR BOXES OF FINITE EXTENT .. 129

CONCLUSION 145

ANNEXE A 147

BIBLIOGRAPHIE 155

INTRODUCTION

Le travail présenté dans cette thèse comporte deux parties distinctes dont le point commun est l'étude théorique des modes convectifs en géométrie confinée.

Nous rappelons d'abord notre contribution à l'étude de la convection dans un fluide maintenu entre deux plaques horizontales infinies, c'est-à-dire négligeant l'effet des parois latérales. Dans ce cas les structures convectives les plus simples sont des rouleaux dont la périodicité spatiale suivant la coordonnée horizontale x est caractérisée par un nombre d'onde a. Près du seuil d'apparition de la convection, les équations d'Oberbeck - Boussinesq (O.B.) qui régissent le comportement convectif du fluide peuvent être résolues par une théorie de perturbations suivant un schéma de développement dû initialement à Landau. On trouve ainsi que la composante verticale de la vitesse convective a pour expression :

$$v_z(x,z) = A_1(z)\cos ax + A_2(z)\cos 2ax + A_3(z)\cos 3ax + \ldots \qquad (1)$$

L'amplitude A_1 du mode fondamental et celles, A_2, A_3, ... des harmoniques dépendent de l'écart au nombre de Rayleigh critique mesuré par la quantité : $\tilde{\varepsilon} = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$. Au premier ordre du développement perturbatif on obtient :

$$A_1 = \tilde{\varepsilon}^{1/2} V_o^{(1)}, \quad A_2 = \tilde{\varepsilon} V_o^{(2)}, \quad A_3 = \tilde{\varepsilon}^{3/2} V_o^{(3)} . \qquad (2)$$

Nous avons calculé explicitement les quantités $V_o^{(1)}$, $V_o^{(2)}$ et $V_o^{(3)}$ dans la limite du nombre de Prandtl infini et pour des nombres d'onde variables. Nos résultats ont été comparés avec des mesures de vitesse effectuées dans une cellule remplie d'huile aux silicones et sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Le comportement de $V^{(1)}$ suivant une loi de puissance en fonction de $\tilde{\varepsilon}$ présente une analogie avec une transition de phase du second ordre dont le paramètre d'ordre serait représenté par la vitesse. On peut pousser plus loin cette analogie et

définir un temps de ralentissement critique τ et une longueur de cohérence ξ qui divergent tous les deux lorsque $\tilde{\varepsilon}$ tend vers zéro, soit :

$$\tau = \tau_o \tilde{\varepsilon}^{-1} \qquad (3.a)$$

$$\xi = \xi_o \tilde{\varepsilon}^{-1/2} . \qquad (3.b)$$

Nous avons calculé la valeur numérique des coefficients τ_o et ξ_o (exprimés ici dans des unités sans dimension) qui sont des grandeurs universelles pour un type de conditions aux limites donné . Des mesures expérimentales ont confirmé la valeur de ces coefficients. Lorsque les dimensions horizontales du récipient dans lequel se développe la convection sont inférieures ou égales à la longueur de cohérence définie plus haut (3.b) il est nécessaire de tenir compte de l'influence des parois latérales dans le traitement des équations O.B. Le développement perturbatif (1) n'est alors plus valable car il n'est pas possible de décrire avec un seul nombre d'onde la modulation spatiale d'amplitude résultant de la présence des parois latérales. Le but de cette thèse est la détermination des structures convectives qui s'établissent lorsqu'on tient compte de conditions aux limites réalistes sur les parois latérales. Dans ce travail ces dernières seront soit cylindriques, soit rectangulaires.

La première partie est consacrée à l'étude du cas où les parois latérales sont cylindriques. Dans cette géométrie l'originalité de notre travail réside dans le choix de l'eau comme fluide convectif, l'extrémité supérieure du cylindre étant maintenue à la température de 4°C tandis que le bas du cylindre est maintenu à 0°C. Dans cette gamme de température la densité de l'eau qui est maximum au voisinage de 4°C varie en fonction du carré de la température. Contrairement au cas des liquides ordinaires pour lesquels la densité varie linéairement en fonction de la température, la loi de variation de densité de l'eau introduit un terme nouveau dans les équations O.B. Ce terme a la propriété de briser la symétrie verticale par rapport au plan horizontal médian. On montre que cela entraîne une modification non seulement du seuil d'apparition de la convection mais aussi des propriétés géométriques de l'écoulement. Il en résulte un abaissement du nombre de Rayleigh critique qui dépend fortement du rapport d'aspect du cylindre (rapport de sa hauteur sur son diamètre). L'analyse linéaire et stationnaire montre que cet abaissement du nombre de Rayleigh critique est surtout important dans la limite des grands rapports d'aspect et s'accompagne dans ce cas de l'apparition d'une deuxième cellule convective verticale. Nous nous sommes servis de ce résultat pour interpréter des faits expérimentaux mettant en évidence la présence de modes oscillant au cours du temps dans la limite des grands rapports d'aspect.

Dans la deuxième partie nous considérons le cas des parois latérales rectangulaires dans la limite où les dimensions horizontales de la boîte parallèlépipédique sont grandes comparées à sa hauteur. L'intérêt que nous portons à ce problème a été soulevé par de récents développements expérimentaux mettant en évidence près du seuil convectif la présence de structures désordonnées qui ne sont pas nécessairement stationnaires et dont l'étude relève de l'analyse non linéaire des équations O.B.. Un premier pas vers la résolution de ce problème général consiste à préciser les structures stationnaires dans le domaine linéaire. Les études antérieures en géométrie rectangulaire utilisent la méthode de Galerkin pour déterminer des nombres de Rayleigh critiques et ces travaux reposent toujours sur l'hypothèse que les structures convectives sont des rouleaux rectilignes d'axe parallèle à l'un ou à l'autre des bords du rectangle. Pour ne pas privilégier a priori un certain type de solutions comme dans la méthode de Galerkin, notre approche consiste à remplacer dans les équations les dérivations spatiales par des différences finies et à résoudre le problème par une méthode numérique implicite. Les résultats montrent que si le mode fondamental est bien formé de rouleaux parallèles au petit côté du rectangle il en va autrement des modes excités, qui peuvent être encore des rouleaux réguliers mais orientés perpendiculairement au petit côté ou même des rouleaux croisés. Certains modes formés pour l'essentiel de rouleaux réguliers présentent des défauts de type dislocations. On peut penser que le couplage non linéaire de ces modes et la dynamique des défauts pourraient rendre compte d'un certain type de turbulence observée près du seuil convectif.

Les deux parties de cette thèse diffèrent par la méthode de résolution des équations O.B.. Ce travail nous aura permis de comparer les avantages et les inconvénients respectifs de la méthode de Galerkin utilisée dans la première partie et de la méthode des différences finies utilisée dans la seconde partie. La méthode de Galerkin convient surtout pour calculer des nombres de Rayleigh, tandis que la méthode des différences finies s'avère mieux adaptée à la détermination des structures convectives.

I . RAPPELS SUR L'ETUDE THEORIQUE DE LA CONVECTION EN MILIEU INFINI

1. La théorie linéaire

Les toutes premières études théoriques[1] sur la convection se rapportent au cas idéal d'une couche plane de fluide confinée entre deux plaques horizontales infinies distante de d et soumise à une différence de température verticale $\Delta T \equiv T_1 - T_2$ (Fig. 1). Le signe de cette différence de température ΔT est tel qu'il induit une stratification instable de densité, le fluide le plus lourd étant par-dessus.

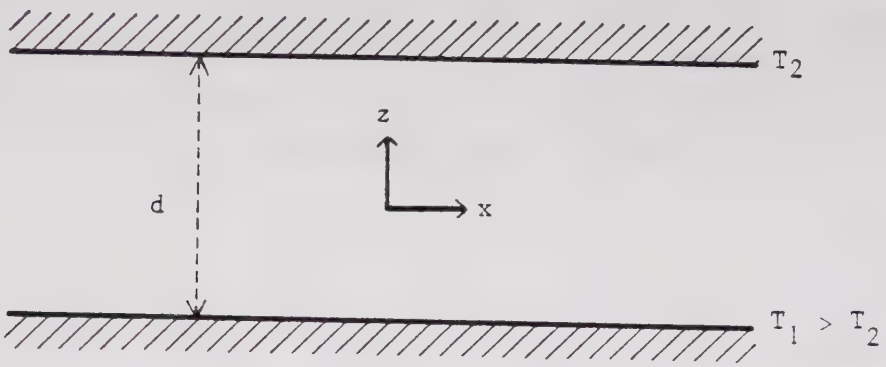


Figure 1 : Géométrie du problème de convection entre plaques parallèles infinies.

Dans l'état conductif la vitesse $\vec{v}$ du fluide est nulle et le gradient de température dans le fluide est linéaire :

$$T(z) = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{(T_1 - T_2)}{d} z \qquad -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}$$

Lorsque la différence de température ΔT dépasse une certaine valeur critique ΔT_c, il apparait dans le fluide un écoulement qui dans de bonnes conditions possède une grande régularité spatiale et donne lieu à ce qu'on appelle des rouleaux convectifs.

Le problème théorique le plus élémentaire consiste à déterminer ΔT_c et la périodicité spatiale de cette structure. En fait le paramètre non dimensionel caractérisant le seuil d'apparition de la convection n'est pas ΔT, mais le nombre de Rayleigh, Ra, défini par :

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \kappa}$$

où α est le coefficient de dilatation thermique, g l'accélération de la pesanteur, ν la viscosité cinématique du fluide et χ sa diffusivité thermique. Le comportement convectif du fluide, c'est à dire l'évolution spatiale et temporelle d'une perturbation de vitesse $\vec{v}$ et de température θ, est régi par l'ensemble des équations d'Oberbeck-Boussinesq, qui pour des grandeurs $\vec{v}$ et θ sans dimension s'écrivent :

$$P^{-1}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}\varpi + \Delta\vec{v} + \theta\vec{e}_z \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\theta = Ra\, v_z + \Delta\theta \qquad (1b)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \qquad (1c)$$

où ϖ est la pression, P le nombre de Prandtl ($P \equiv \frac{\nu}{\chi}$) et $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire suivant la verticale ascendante. En éliminant la pression et les deux composantes horizontales de la vitesse, v_x et v_y, on obtient une équation aux dérivées partielles du sixième ordre pour la composante verticale v_z :

$$\left(P^{-1}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Delta v_z - Ra\,\Delta_2 v_z = -\Delta_2 h + P^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\vec{\delta}.\vec{L} \qquad (2)$$

où Δ_2 est le Laplacien horizontal :

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$\vec{\delta}$ est un opérateur différentiel vectoriel dont les composantes sont :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \quad , \quad -\Delta_2$$

h et $\vec{L}$ sont les termes non linéaires figurant dans (1a,b,c) :

$$h = (\vec{v}.\vec{\nabla})\theta$$
$$\vec{L} = (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} \qquad (3)$$

On étudie la stabilité des perturbations $\vec{v}$ et θ en leur accordant une dépendance temporelle de la forme $e^{\sigma t}$, où σ représente le taux de croissance ou d'amortissement de la perturbation. L'état de stabilité marginale, soit le seuil d'apparition de la convection, est atteint lorsque σ vaut zéro. On admettra que l'amplitude des perturbations croit continûment à partir d'une valeur très faible et atteint une amplitude finie pour des nombres de Rayleigh supérieurs au nombre de Rayleigh critique, ce qui conduit à négliger les termes quadratiques en h et $\vec{L}$, dans l'équation (2). Compte tenu des hypothèses qui viennent d'être faites, l'équation (2) prend la forme :

$$\Delta^3 v_z - Ra\Delta_2 v_z = 0 \qquad (4)$$

C'est une équation linéaire qu'il faut résoudre avec des conditions aux limites adéquates en $z = \pm \frac{d}{2}$. Les conditions aux limites se divisent en deux catégories :

i) Les conditions aux limites mécaniques qui concernent la vitesse sur les parois horizontales. Elles sont elles-mêmes de deux types. Si toutes les composantes de la vitesse s'annulent sur les parois :

$$v_x = v_y = v_z = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm \frac{d}{2} \qquad (5)$$

on dira de ces parois qu'elles sont "rigides". Si l'on autorise la possibilité de glissement sur ces parois, soit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \quad , \quad v_z = 0 \qquad (6)$$

on dira de ces parois qu'elles sont "libres". En général les conditions aux limites sur les deux parois, $z = \frac{d}{2}$ et $z = -\frac{d}{2}$ sont identiques et elles constituent avec l'équation (4) un problème symétrique par rapport au plan médian $z = 0$. On rencontre parfois des conditions aux limites mixtes, "rigides" en bas et "libres" en haut par exemple. Plus généralement lorsque la couche de fluide

convectif est intercalée entre deux couches d'un autre fluide la condition (6) se récrit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = B_\nu v_x \quad , \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = B_\nu v_y \quad , \quad v_z = 0 \quad , \qquad (7)$$

où B_ν est un nombre de Biot qui dépend des viscosités des deux fluides et de l'épaisseur du fluide convectif [2] . Lorsque le fluide adjacent est peu visqueux, $B_\nu = 0$, au contraire pour un fluide très visqueux ou un solide B_ν est infini.

ii) Les conditions aux limites thermiques fixent la valeur de la température ou du flux de chaleur normal à la paroi. La relation la plus générale est :

$$\theta = B_\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \qquad \text{en} \qquad z = \pm \frac{d}{2} \qquad (8)$$

où B_κ est un nombre de Biot qui dépend des conductivités thermiques des parois et du fluide ainsi que de l'épaisseur du fluide[2] . Lorsque les parois sont conductrices $B_\kappa = 0$, au contraire lorsque les parois sont isolantes B_κ est infini. Avant de résoudre (4) avec les conditions aux limites adéquates nous devons faire une dernière hypothèse qui restreint l'espace des solutions à une classe de fonctions ayant une périodicité bien définie dans le plan horizontal (x,y), par la relation :

$$\Delta_2 v_z = -a^2 v_z \qquad (9)$$

où, a, est le nombre d'onde horizontal de la structure. Lorsque la relation (9) est substituée dans l'équation (4), celle -ci se réduit à une équation différentielle ordinaire pour la dépendance verticale w(z) de la composante verticale de la vitesse, soit :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - a^2\right)^3 w + Ra\, a^2 w = 0 \qquad (10)$$

Le choix de conditions aux limites "libres" et conductrices :

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \theta = 0 \qquad \text{en} \qquad z = \pm \frac{1}{2} \tag{11}$$

simplifie beaucoup la résolution de l'équation (10) qui admet pour solutions des fonctions circulaires :

$$w = \cos n\pi z \quad , \quad n \neq 0 \tag{12}$$

et la courbe de stabilité marginale qui donne la valeur du nombre de Rayleigh en fonction du nombre d'onde a pour équation :

$$Ra = \frac{(n^2\pi^2 + a^2)^3}{a^2} \tag{13}$$

Cette courbe a un minimum pour $n = 1$ et $a^2 = a_o^2 \equiv \frac{\pi^2}{2}$, il vaut $Ra = Ra_c \equiv \frac{27\pi^4}{4}$ et c'est le nombre de Rayleigh critique. La résolution de l'équation (10) avec des conditions aux limites "rigides" est moins directe, on la trouvera dans la référence [3]. Le nombre de Rayleigh dans ce cas est solution d'une équation transcendante, sa valeur critique est 1707.8 et le nombre d'onde associé vaut 3.117 en unité 1/d.

L'analyse qui précède ne fournit aucun renseignement sur la dépendance horizontale de l'écoulement convectif. La fonction la plus simple qui satisfait (9) est de la forme :

$$v_z = \cos ax \cos \pi z \tag{14}$$

elle correspond à une structure convective en forme de rouleaux d'axes parallèles à Oy. Cet écoulement est bidimensionel puisqu'il ne dépend pas de la coordonnée y et que la composante v_y de la vitesse est nulle. On peut concevoir d'autres types d'écoulements par exemple :

$$v_z = \cos mx \cos ly \cos \pi z \tag{15}$$

avec

$$m^2 + l^2 = a^2$$

Cette fois la cellule convective élémentaire a une forme rectangulaire en projection horizontale. Un arrangement cellulaire hexagonal est lui aussi possible avec :

$$v_z = \left(2 \cos \frac{2\pi x}{\sqrt{3}L} \cos \frac{2\pi y}{3L} + \cos \frac{4\pi y}{3L}\right) \cos \pi z \qquad (16)$$

qui est la solution donnée par Christopherson[4] (1940), où L est la longueur d'un côté de l'hexagone et $a_o L = \frac{4\pi}{3}$.
Les fonctions $v_z(x,z)$ définies en (14), (15) et (16) sont données à un facteur multiplicatif près car la théorie linéaire ne permet pas de fixer l'amplitude des perturbations. Les perturbations de vitesse de la forme (14), (15) et (16) qui peuvent se développer près du seuil avec une amplitude infinitésimale, ne restent pas nécessairement stables lorsqu'elles atteignent une amplitude finie. L'étude de la stabilité non linéaire sera abordée dans le paragraphe suivant.

2. La théorie non linéaire

Le problème le plus simple que l'on résoud par la théorie non linéaire est le calcul de l'amplitude des perturbations (14), (15) et (16). Le point de départ est la forme stationnaire de l'équation (2) soit :

$$\Delta^3 v_z - Ra\Delta_2 v_z = - [\Delta_2 h + P^{-1}\Delta(\vec{\delta}.\vec{L})] \qquad (17)$$

L'aspect non linéaire de la convection a été traité à peu de temps d'intervalle d'abord par Gorkov [5] (1957) puis par Malkus et Veronis [6] (1958) dans le cas de conditions aux limites "libres" suivant un schéma de développement dû à Landau[7] et Sorokin[8]. Ces auteurs utilisent un développement perturbatif de toutes les grandeurs en fonction d'un petit paramètre ε qui représente l'amplitude des perturbations près du seuil. On a ainsi :

$$\begin{aligned} v_z &= \varepsilon v_z^{(1)} + \varepsilon^2 v_z^{(2)} + \varepsilon^3 v_z^{(3)} + \ldots \\ v_x &= \varepsilon v_x^{(1)} + \varepsilon^2 v_x^{(2)} + \ldots \\ v_y &= \varepsilon v_y^{(1)} + \ldots \\ \theta &= \varepsilon \theta^{(1)} + \varepsilon^2 \theta^{(2)} + \ldots \end{aligned} \qquad (18)$$

On développe aussi le nombre de Rayleigh :

$$Ra = Ra_c + \varepsilon\, Ra^{(1)} + \varepsilon^2 Ra^{(2)} + \ldots \qquad (19)$$

Lorsqu'on reporte les expressions (18) et (19) dans l'équation (17) et qu'on résoud ordre par ordre en ε, on obtient une suite d'équations linéaires inhomogènes :

$$\mathscr{L}[v_z^{(1)}] = 0$$

$$\mathscr{L}[v_z^{(2)}] = -[\Delta_2 h^{(2)} + P^{-1}\Delta(\vec{\delta}.\vec{L}^{(2)})] + Ra^{(1)}\Delta_2 v_z^{(1)} \qquad (20)$$

$$\mathscr{L}[v_z^{(n)}] = -[\Delta_2 h^{(n)} + P^{-1}\Delta(\vec{\delta}.\vec{L}^{(n)})] + \sum_{p=1}^{n-2} Ra^{(p)}\Delta_2 v_z^{n-p} + Ra^{(n-1)}\Delta_2 v_z^{(1)}$$

où l'opérateur linéaire $\mathscr{L}$ vaut :

$$\mathscr{L} \equiv \Delta^3 - Ra_c\Delta_2$$

et les quantités $h^{(n)}$ et $L^{(n)}$ sont définies respectivement par :

$$h^{(n)} = \sum_{p=1}^{n} (\vec{v}^{(p)}.\vec{\nabla})\theta^{(n-p)} \qquad (21a)$$

et :

$$L^{(n)} = \sum_{p=1}^{n} (\vec{v}^{(p)}.\vec{\nabla})\vec{v}^{(n-p)} \qquad (21b)$$

La condition d'existence d'une solution pour chacune des équations (20) détermine les paramètres inconnus $Ra^{(n)}$. Cette condition s'exprime en imposant au membre de droite de chacune des équations (20) d'être orthogonal au noyau de l'opérateur linéaire adjoint de $\mathscr{L}$. Nous allons préciser maintenant comment on détermine cet opérateur adjoint et les conditions aux limites associées.

La périodicité de l'écoulement étant exprimée par la relation (9) on a vu au paragraphe précédent que l'équation :

$$\mathscr{L}[v_z] = 0 \tag{22}$$

se réduisait alors à l'équation (10) que nous écrirons sous la forme :

$$Lw = 0 \tag{23}$$

en introduisant l'opérateur différentiel linéaire :

$$L \equiv (D^2 - a^2)^3 + a^2 Ra$$

où

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial z}$$

Les conditions aux limites associées à l'équation (23) s'écriront symboliquement sous la forme :

$$B_i w = 0 \qquad i = 1,2,3 \qquad \text{en} \qquad z = \pm \frac{1}{2} \tag{24}$$

Les cas i = 1 et i = 2 traduisent les conditions aux limites mécaniques et le cas i = 3 traduit la condition aux limites thermique. A l'ordre le plus bas du développement perturbatif, la fonction w(z) est reliée au profil vertical de température $\Theta(z)$ qui satisfait lui aussi l'équation :

$$L\Theta = 0 \tag{25}$$

L'équation de transport de la chaleur fournit la relation :

$$\Delta_1 \Theta = v = 0 \tag{26}$$

où $\Delta_1 = D^2 - a^2$

qui se transforme grâce à (25) pour donner :

$$\Delta_1^2 w = a^2 Ra\, \Theta \tag{27}$$

Ainsi les conditions aux limites sur des parois rigides et conductrices s'expriment soit en fonction de w, par :

$$w = Dw = \Delta_1^2 w = 0 \quad , \tag{28}$$

Soit en fonction de Θ, par :

$$\Delta_1\Theta = D\Delta_1\Theta = \Theta = 0 \tag{29}$$

On définit maintenant le produit scalaire de deux fonctions :

$$(v,w) = \int_{-1/2}^{1/2} dz\, v(z)w(z) \quad , \tag{30}$$

et l'opérateur L^+ adjoint de L :

$$(v,Lw) = (w,L^+v) \tag{31}$$

Après une succession d'intégrations par partie le membre de gauche de (31) :

$$(v,Lw) \equiv (v,\Delta_1^3 w) + a^2\, Ra(v,w) \quad ,$$

se met sous la forme :

$$(v,Lw) = (w,Lv) + B(v,w) \quad ,$$

où B(v,w) est un terme de surface:

$$B(v,w) = \Big[v(D\Delta_1^2 w) - (Dv)\Delta_1^2 w + (\Delta_1 v)D\Delta_1 w - (D\Delta_1 v)\Delta_1 w + (\Delta_1^2 v)Dw - (D\Delta_1^2 v)w \Big]_{-1/2}^{+1/2} \tag{32}$$

où l'on a adopté la notation :

$$[f(z)]_a^b = f(b) - f(a) \quad .$$

Lorsque les parois sont rigides et conductrices (28), les deuxième , cinquième et sixième termes du membre de droite de (32) sont nuls et il reste :

$$B(v,w) = \Big[v(D\Delta_1^2 w) + (\Delta_1 v)D\Delta_1 w - (D\Delta_1 v)\Delta_1 w \Big]_{-1/2}^{+1/2} \tag{33}$$

qui s'annule lorsque :

$$v = \Delta_1 v = D\Delta_1 v = 0$$

Ainsi le problème adjoint de :

$$\begin{cases} Lw = 0 & (34a) \\ w = Dw = \Delta^2 w = 0 \qquad \text{en} \qquad z = \pm \frac{1}{2} & (34b) \end{cases}$$

est :

$$\begin{cases} Lv = 0 & (35b) \\ v = \Delta_1 v = D\Delta_1 v = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm \frac{1}{2} & (35b) \end{cases}$$

Compte tenu de (25) et (29) on peut identifier v à Θ. Comme nous l'avons déjà montré en établissant l'équivalence des expressions (28) et (29) les conditions aux limites (35.b) avec $v \equiv \Theta$ traduisent les mêmes contraintes que les conditions (34.b) et donc l'opérateur L est auto adjoint. Nous venons d'examiner le cas particulier où les parois sont rigides et conductrices (28) mais notre raisonnement reste vrai dans le cas général (24). Dans l'expression (32) de B(v,w) il y a toujours trois termes qui sont nuls à cause des conditions aux limites du problème direct défini par (23) et (24), et l'annulation des trois termes restants fournit les conditions aux limites du problème adjoint. On vérifiera aisément que le problème adjoint se présente sous la forme générale :

$$\begin{cases} L\Theta = 0 & (36a) \\ B_i^+ \Theta = 0 \qquad i = 1,2,3 \qquad \text{en} \qquad z = \pm \frac{1}{2} & (36b) \end{cases}$$

Les conditions :

$$\left.\begin{array}{l} B_i w = 0 \\ B_i^- \Theta = 0 \end{array}\right\} \quad i = 1,2,3 \qquad \text{en} \qquad z = \pm \frac{1}{2}$$

traduisent les mêmes conditions aux limites mais exprimées sur des grandeurs différentes. Le passage de l'une (24) à l'autre (36.b) se fait par l'intermédiaire des relations (26) et (27). Nous pouvons maintenant donner la forme explicite des paramètres $Ra^{(n)}$:

$$Ra^{(n-1)} = \frac{\langle \theta^{(1)}, \Delta_2 h^{(n)} + P^{-1} \Delta(\vec{\delta}.\vec{L}^{(n)}) - \sum_{p=1}^{n-2} Ra^{(p)} \Delta_2 v_z^{(n-p)} \rangle}{\langle \theta^{(1)}, \Delta_2 v_z^{(1)} \rangle} \qquad (37)$$

où les crochets < > désignent l'intégrale sur tout le volume d'une cellule convective élémentaire. Le calcul montre que $Ra^{(1)}$ est nul lorsque les conditions aux limites en $z = \pm \frac{d}{2}$ sont symétriques. Dans ce cas l'expression de la quantité ε à l'ordre le plus bas du développement (19) est :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{Ra - Ra_c}{Ra^{(2)}}} \qquad (38)$$

On en déduit que l'amplitude des perturbations convectives varie près du seuil en fonction du nombre de Rayleigh comme $\sqrt{Ra - Ra_c}$. Cette loi de variation est très bien vérifiée expérimentalement[9] . La méthode perturbative que nous venons d'illustrer dans le cas de conditions aux limites "libres" a été appliquée plus tard dans le cas de conditions aux limites "rigides" par Schlüter, Lortz et Busse[10] (1965). Nous nous sommes inspirés de leur méthode pour calculer ultérieurement la valeur de $Ra^{(2)}$, et donc l'amplitude des perturbations, en fonction de l'écart au nombre de Rayleigh critique lorsque la condition aux limites thermique sur les parois horizontales est de la forme générale (18) et dans la limite du nombre de Prandtl infini (Table 1). Nous avons comparé nos résultats théoriques à ceux des résultats expérimentaux pour lesquels la structure de l'écoulement convectif est constitué de rouleaux d'axes parallèles, c'est à dire lorsque v_z est de la forme :

$$v_z = \sqrt{\frac{Ra - Ra_c}{Ra^{(2)}}} \cos a_o x \, f(z) \qquad , \qquad (39)$$

où f(z) est une fonction connue que l'on ne précisera pas ici. Lorsque le fluide

Table 1a

B_v^{-1}	a_c	Ra_c	$Ra^{(2)}$	$Ra^{(4)}$	$\tilde{W}^{(1)}_{max}$	$\tilde{V}^{(2)}_{max}$
0	3.116	1707.7	1014.6	849.79	11.82	0.2603
0.05	2.942	1355.9	668.1	347.43	11.74	0.1795
0.1	2.824	1186.0	514.4	149.36	11.64	0.1363
0.5	2.489	843.3	247.6	3.30	11.24	0.0459
1	2.381	761.2	194.7	-2.68	11.10	0.0250
100	2.223	658.6	135.8	-4.625	10.88	0.0003
50 000	2.221	657.5	135.2	-4.626	10.88	0.0
(∞)						

Table 1b

$a_c \times B_k$	a_c	R_c	$R^{(2)}$	$R^{(4)}$	$\tilde{W}^{(1)}_{max}$	$\tilde{V}^{(2)}_{max}$
0	3.116	1707.7	1014.6	849.79	11.82	0.2603
0.5	2.669	1415.1	920.48	241.90	8.65	0.4504
1	2.398	1267.5	699.85	142.02	6.98	0.5092
5	1.629	955.1	198.69	15.24	3.68	0.5383
50	0.803	772.8	13.54	-0.126	1.54	0.3807
1000	0.300	727.2	0.21	-8×10^{-4}	0.54	0.1606
50 000	0.082	720.5	0.6×10^{-3}	-10^{-7}	0.15	0.0445
(∞)						

Prédictions concernant le nombre d'onde et le nombre de Rayleigh critiques, les paramètres $Ra^{(2)}$, $Ra^{(4)}$ et les amplitudes maximum $\tilde{W}^{(1)}_{max}$, $\tilde{V}^{(2)}_{max}$ des deux composantes de la vitesse exprimées en unités $\chi\, d^{-1}$:

$$v_z = \tilde{\varepsilon}^{1/2} \cos ax\, \tilde{W}^{(1)}(z) + \tilde{\varepsilon} \cos 2ax\, \tilde{W}^{(2)}(z)$$

$$v_x = \tilde{\varepsilon}^{1/2} \cos ax\, \tilde{V}^{(1)}(z) + \tilde{\varepsilon} \cos 2ax\, \tilde{V}^{(2)}(z)$$

ou $\tilde{\varepsilon} = (Ra - Ra_c)/Ra_c$.

a) Les conditions aux limites en $z = \pm \frac{1}{2}$ sont : $B_v^{-1} \frac{dv_x}{dz} = v_x$; $v_z = \theta = 0$

b) Les conditions aux limites en $z = \pm \frac{1}{2}$ sont : $B_v \frac{\partial \theta}{\partial z} = \theta$; $v_x = v_z = 0$.

convectif est de l'huile aux silicones maintenu entre deux plaques de cuivre ($B_K = 0$), le rapport $\frac{\chi}{d}$ qui représente l'unité dans laquelle sont mesurées les vitesses vaut $1.14\ 10^{-3}$cm/s . Dans ces conditions et pour $Ra = 2\ Ra_c$ on prévoit théoriquement des vitesses maximum de l'ordre de 130 µm/s, en très bon accord avec l'expérience. Il faut noter que dans la réalité expérimentale, l'expression de la vitesse v_z a rarement une forme aussi simple que (39). Une meilleure approximation est constituée par le développement suivant :

$$v_z(x,z) = A_1(z) \cos a x + A_2(z) \cos 2ax + A_3(z) \cos 3ax + \ldots \quad (40)$$

où a n'est pas toujours égal au nombre d'onde critique a_o et où les amplitudes $A_2(z)$ et $A_3(z)$ des harmoniques sont loin d'être négligeables lorsqu'on s'éloigne de la valeur critique du nombre de Rayleigh. Les amplitudes A_i, i = 1,2..., dépendent du paramètre ε et s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \varepsilon V_z^{(1,1)} + \varepsilon^3 V_z^{(1,3)} + \ldots \\ A_2(z) &= \varepsilon^2 V_z^{(2,2)} + \varepsilon^4 V_z^{(2,4)} + \ldots \\ A_3(z) &= \varepsilon^3 V_z^{(3,1)} + \varepsilon^5 V_z^{(3,3)} + \ldots \end{aligned} \quad (41)$$

Les quantités $V_z^{(i,j)}$, i, j = 1,2,..., sont déterminées par la résolution du système d'équations (20) à des ordres de plus en plus élevés. Nous avons calculé les quantités $V_z^{(1,1)}$, $V_z^{(2,2)}$ et $V_z^{(3,1)}$ pour des nombres d'onde a, compris à l'intérieur de la courbe de stabilité marginale [11] . Le calcul a été mené conjointement à des mesures expérimentales et nous a permis de tester le domaine de validité de la théorie des perturbations (18). Pour des nombres d'onde a compris entre 2.5 et 4 (exprimés en unités d^{-1}), l'amplitude du mode fondamental $V_z^{(1,1)}$ est très bien décrite par la méthode perturbative jusqu'à des nombres de Rayleigh $Ra \simeq 7\ Ra_c$. Les résultats sont un peu moins bons en ce qui concerne $V_z^{(3,1)}$. Si l'on compare nos résultats avec ceux déduits d'un calcul de Busse[12] qui utilise la méthode de Galerkin, on constate que cette deuxième méthode reproduit parfaitement les résultats expérimentaux concernant l'amplitude $V_z^{(3,1)}$ alors que cette même méthode de Galerkin donne des résultats médiocres pour $V_z^{(1,1)}$(Fig. 2).

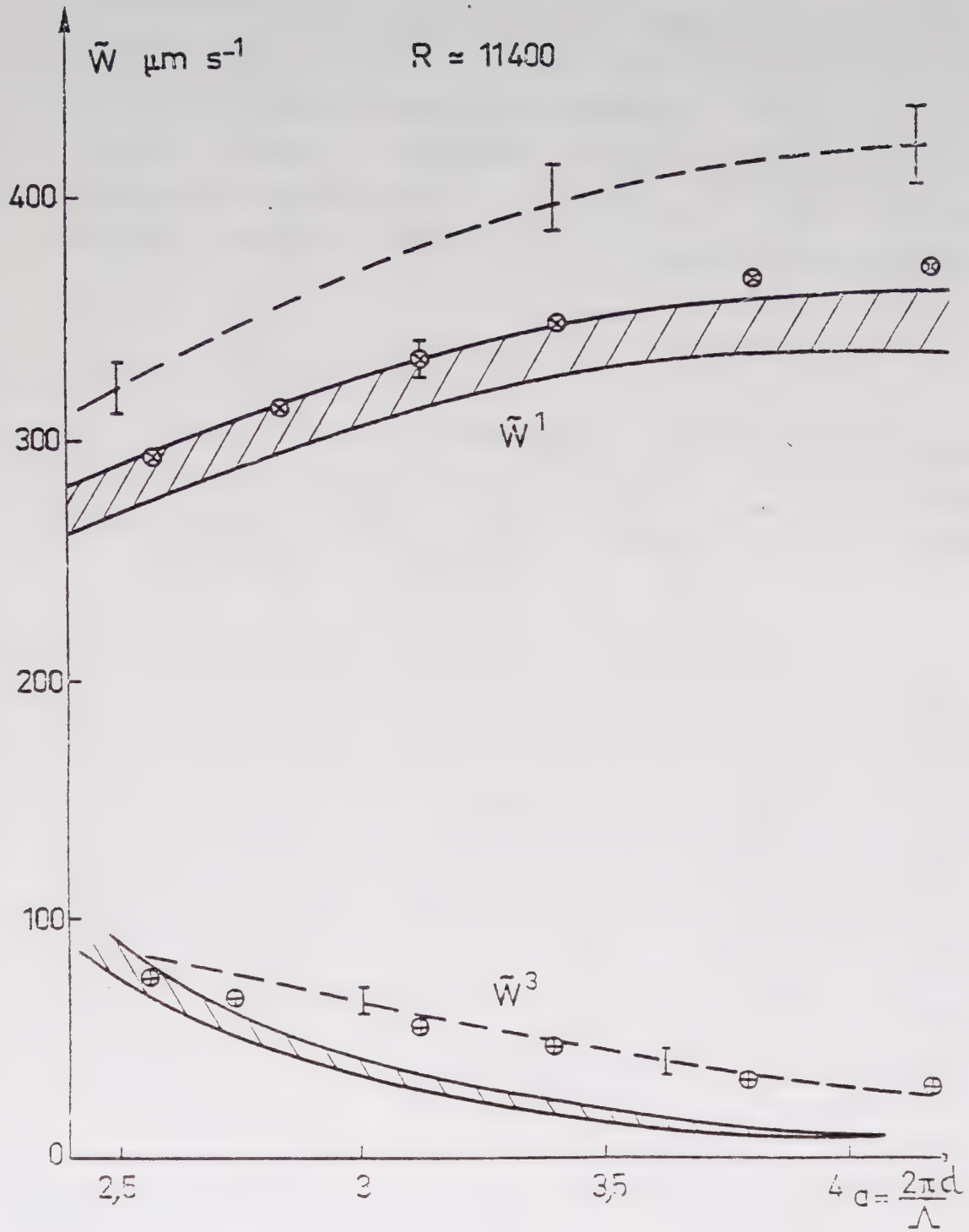


Figure 2 : Amplitudes de la composante verticale de la vitesse v_z en fonction du nombre d'onde a pour Ra ≃ 11400 : ⊗ points expérimentaux correspondant à $\tilde{w}^{(1)} = \frac{\chi}{d} A_1(0)$; ⊖ points expérimentaux correspondant à $\tilde{w}^{(3)} = \frac{\chi}{d} A_3(0)$; les régions hachurées correspondent aux prédictions théoriques et leurs largeurs dépendent de l'incertitude sur χ, la diffusivité thermique, et sur le nombre de Rayleigh critique ; les pointillés correspondent aux valeurs déduites des calculs de Busse.

L'autre problème auquel la théorie non linéaire doit apporter une réponse est l'étude de la stabilité des solutions stationnaires (40) vis à vis de certains types de perturbations et en négligeant encore l'influence des parois latérales. Dans ce domaine la contribution de F. Busse a été importante et nous la rappellerons sommairement dans le paragraphe suivant.

3. Principaux types d'instabilités

Pour déterminer la stabilité d'une solution stationnaire de vitesse $\vec{v}$ et de température θ, on lui superpose une perturbation infinitésimale de vitesse $\tilde{\vec{v}}$ et de température $\tilde{\theta}$. Si la perturbation a un taux de croissance positif la solution stationnaire est instable. Les équations qui gouvernent les perturbations $\tilde{\vec{v}}$ et $\tilde{\theta}$ dans la limite du nombre de Prandtl infini sont :

$$\Delta^2\tilde{\phi} - \tilde{\theta} = 0 \qquad (42a)$$

$$\Delta\tilde{\theta} - Ra\Delta_2\tilde{\phi} = (\vec{\delta}\phi.\vec{\nabla})\tilde{\theta} + (\vec{\delta}\tilde{\phi}.\vec{\nabla})\theta + \frac{\partial\theta}{\partial t} \qquad (42b)$$

où l'on a introduit le potentiel des vitesses, ϕ, tel que :

$$\vec{v} = \vec{\delta}\phi \qquad (43)$$

où $\vec{\delta}$ est l'opérateur différentiel défini précédemment. Lorsque la solution stationnaire est formée de rouleaux parallèles les équations (42a,b) sont des équations différentielles à coefficients constants par rapport au temps et à y. La solution générale pour $\tilde{\phi}$ peut alors s'écrire :

$$\tilde{\phi} = e^{iax}\, f(z)\, e^{i(dx+by)+\sigma t} \qquad (44)$$

Le problème de la stabilité se ramène à la détermination de σ et plus précisément des conditions pour lesquelles la partie réelle de σ prends la plus grande valeur. On distingue les instabilités oscillantes[13] pour lesquelles σ prends des valeurs complexes des instabilités non oscillantes pour lesquelles σ est purement réel. Utilisant la méthode de Galerkin, Busse a montré que le taux de croissance maximum des perturbations est toujours atteint pour b = 0 ou d = 0. Parmi les instabilités non-oscillantes[14] il existe trois catégories :

i) L'instabilité de type "rouleaux croisés"

Elle correspond au cas d = 0 et b proche de a_o. Elle se manifeste avec le plus de vigueur lorsque le nombre d'onde a des rouleaux stationnaires est suffisamment éloigné du nombre d'onde critique a_o. Ces rouleaux primaires vont tendre à disparaitre au profit d'un système de rouleaux ayant une longueur d'onde mieux ajustée. Le système de rouleaux secondaires émerge dans la direction perpendiculaire au système de rouleaux initial car c'est la direction où l'influence stabilisante du système de rouleaux primaires se fait le moins sentir.

ii) L'instabilité de type "zig-zag"

Elle correspond encore au cas d = 0 et à des nombres d'onde b petits. Elle se manifeste lorsque le nombre d'onde des rouleaux stationnaires est trop petit, et tend à accroître le nombre d'onde effectif en courbant les rouleaux. Cette instabilité est étroitement liée à la propriété d'invariance par translation suivant Ox du système de rouleaux initial. Une solution exacte du système d'équations (42a,b) est fourni par :

$$\sigma = 0 \quad , \quad \tilde{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad \tilde{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad , \qquad (45)$$

qui s'obtient par différentiation des équations stationnaires. Cela revient à dire que si $\phi(x)$ est solution $\phi(x+dx)$ est aussi une solution. Les solutions avec un taux de croissance σ positif sont la généralisation de (45) et sont de la forme $\phi(x+dx(y))$ où l'accroissement dx dépend maintenant de y.

iii) L'instabilité d'Eckhaus[15]

Elle correspond au cas b = 0 et d petit et restreint la bande de nombre d'onde permise par la théorie linéaire soit $(a_o - \Delta_o, a_o + \Delta_o)$ à un domaine plus petit $\left(a_o - \frac{\Delta_o}{\sqrt{3}}, a_o + \frac{\Delta_o}{\sqrt{3}}\right)$.

Pour des nombres de Prandtl de l'ordre de l'unité il existe deux autres mécanismes d'instabilités qui disparaissent lorsque le nombre de Prandtl tend vers zéro ou l'infini. Selon Busse[16] l'instabilité dominante aux nombres de Prandtl intermédiaires est l'instabilité "variqueuse" qui correspond à un élargissement et un rétrécissement, périodique dans l'espace, des rouleaux suivant leur axe. Mathématiquement cette instabilité est caractériséepar un rapport $\frac{b}{d}$ fini.

L'autre instabilité, "knot instability" en anglais, ne modifie pas beaucoup la structure des rouleaux. Elle tire son nom de l'image observée (Fig. 3) lorsqu'on visualise la structure par shadowgraphie

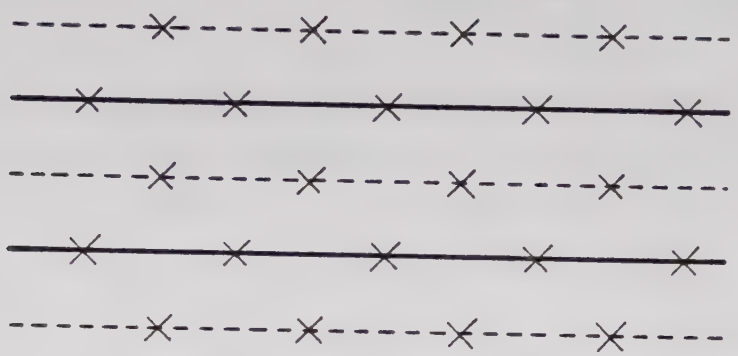


Figure 3

"Knot instability"

Sur cette figure représentant la structure convective vu de dessus, les lignes pleines matérialisent les nappes de fluide montant d'un côté d'un rouleau et les pointillés les nappes de fluide descendant de l'autre côté. Les noeuds que l'on voit sur ces lignes indiquent un accroissement de la vitesse verticale en ces points. Lorsque l'instabilité est bien développée cette structure cède la place à une autre appelée "spoke pattern" d'après l'image strioscopique montrant la présence de lignes de focalisation organisés en faisceaux dans certaines zones très fluctuantes du fluide, l'ensemble de la structure spatiale étant par ailleurs très désordonné.

Rappelons qu'on a jamais vu se développer spontanément les instabilités décrites dans ce paragraphe. Les conditions expérimentales dans lesquelles elles apparaissent sont toujours préparée de manière à imposer initialement une structure en rouleaux réguliers de longueur d'onde fixée. Dans la majorité des expériences, où la structure initiale est assez irrégulière, ces instabilités n'apparaissent jamais de façon aussi pure. Les irrégularités locales et surtout la présence de parois latérales jouent alors un rôle prépondérant et favorisent l'apparition d'autres instabilités.

4. Effets critiques dans l'instabilité de Rayleigh-Bénard

Revenons maintenant aux propriétés de la convection au voisinage de son seuil critique d'instabilité. Nous avons vu au paragraphe 1 que l'amplitude de

la vitesse convective variait près du seuil suivant une loi de puissance (38) :

$$V = V_o \, \tilde{\varepsilon}^{1/2} \tag{46}$$

où :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$$

Un tel comportement présente une analogie avec une transition de phase du second ordre dont le paramètre d'ordre serait représenté par la vitesse. L'exposant 1/2 dans l'équation (46) doit être identifié avec l'exposant critique β, sa valeur ici étant en parfait accord avec celle prédite par la théorie de Landau-Hopf. La théorie de Landau-Hopf prévoit aussi que le taux de croissance (ou d'amortissement) de l'amplitude de la vitesse devient très lent lorsque $\tilde{\varepsilon}$ est très petit. Le phénomène correspond au ralentissement critique dans les transitions de phase. Le modèle de Landau-Hopf peut être élargi pour tenir compte du concept de longueur d'influence qui diverge lorsque $\tilde{\varepsilon}$ tend vers zéro. Plus précisément le taux de croissance σ se met sous la forme :

$$\sigma = \sigma_o \tilde{\varepsilon} \tag{47}$$

et la longueur de cohérence ξ vaut :

$$\xi = \xi_o \, d \, \tilde{\varepsilon}^{-1/2} \tag{48}$$

Les grandeurs ξ_o et σ_o sont des grandeurs universelles dont nous avons calculé la valeur numérique[17] pour les deux types de conditions aux limites "libres" et "rigides". L'équation de Landau-Hopf se met alors sous la forme :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sigma_o \left(\tilde{\varepsilon} V + \xi_o^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{V^3}{V_o^2} \right) \tag{49}$$

Des mesures expérimentales ont confirmé ces résultats théoriques y compris les valeurs explicites des coefficients σ_o, ξ_o et V_o. Dans ces expériences la longueur de cohérence se déduit de la forme de la modulation de l'amplitude qui résulte de la présence de parois latérales Fig.4 et 5. Le temps de ralentissement critique se déduit de la loi de retour à l'équilibre d'une solution stationnaire que l'on a brusquement perturbée (Fig. 6 et 7).

Lorsque les dimensions horizontales du récipient dans lequel se développe la convection sont inférieures ou égales à la longueur de cohérence définie

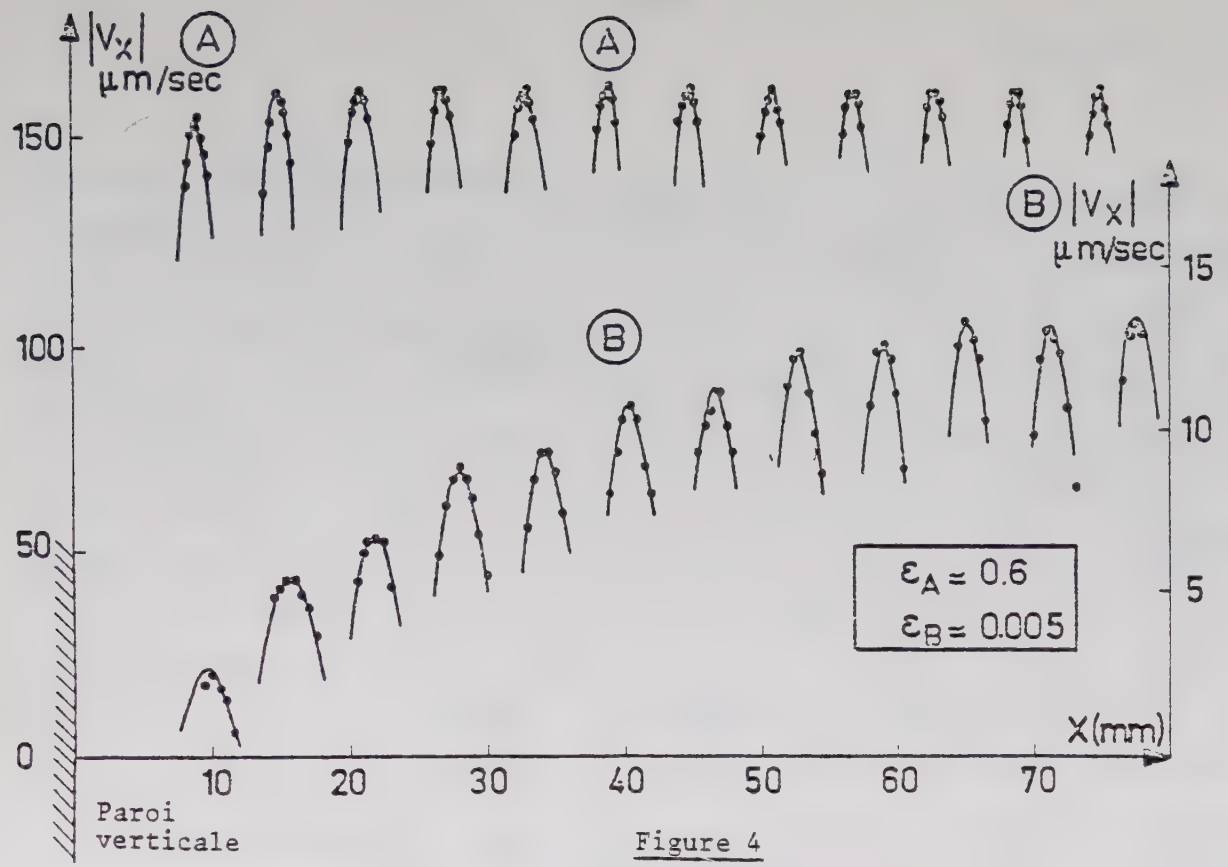


Figure 4

Dépendance spatiale de v_x (pour la valeur de z où elle est maximale) en fonction de la distance x à une paroi verticale pour deux valeurs différentes de ε.

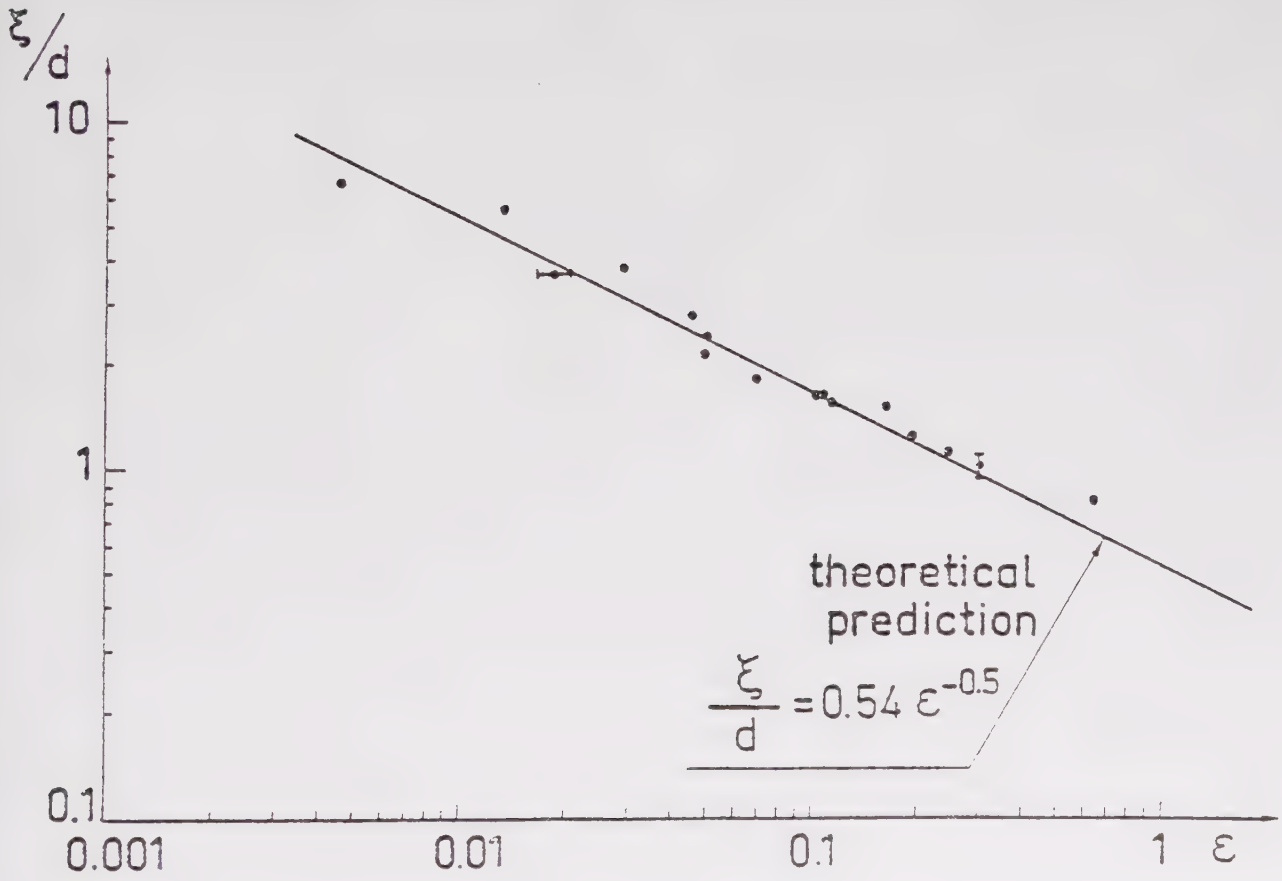


Figure 5

Longueur de cohérence réduite ξ/d en fonction de ε. Le trait plein donne la prédiction théorique.

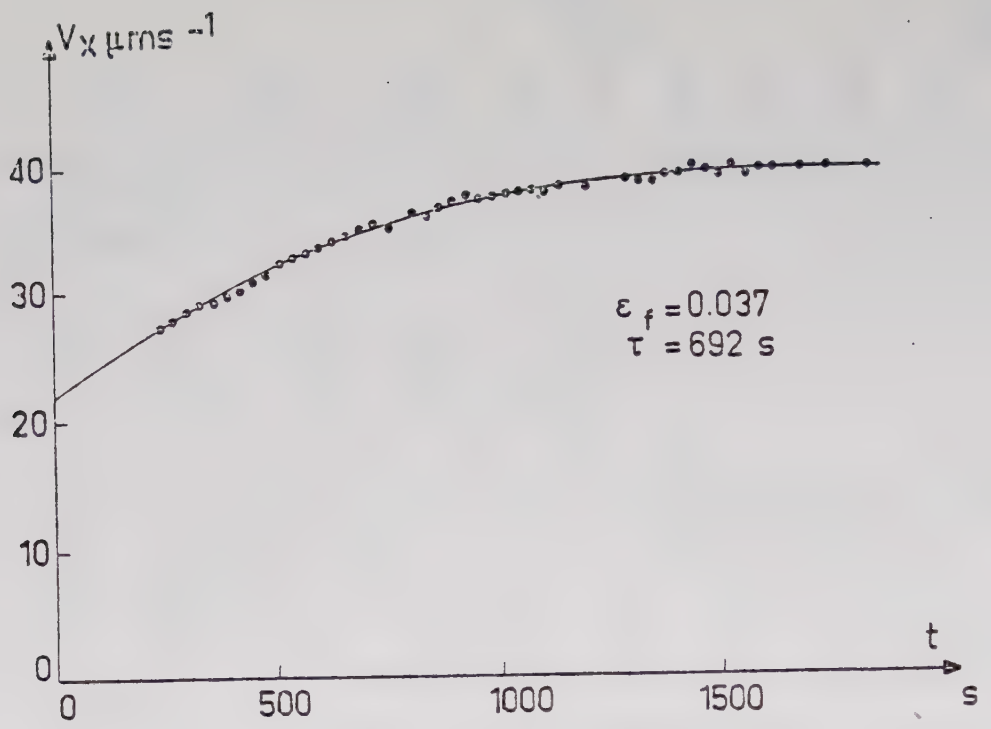


Figure 6

Variations de la composante v_x de la vitesse en fonction du temps après un changement brutal de ΔT au temps t = 0, le trait plein représente le meilleur ajustement avec l'expression :

$$v_x(t) = v_f \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)\left[\exp\left(\frac{2t}{\tau}\right) + \left(\frac{v_f}{v_i}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}$$

où v_i et v_f sont respectivement les amplitudes initiales et finales de la vitesse et où $\tau = \sigma^{-1}$ est le ralentissement critique.

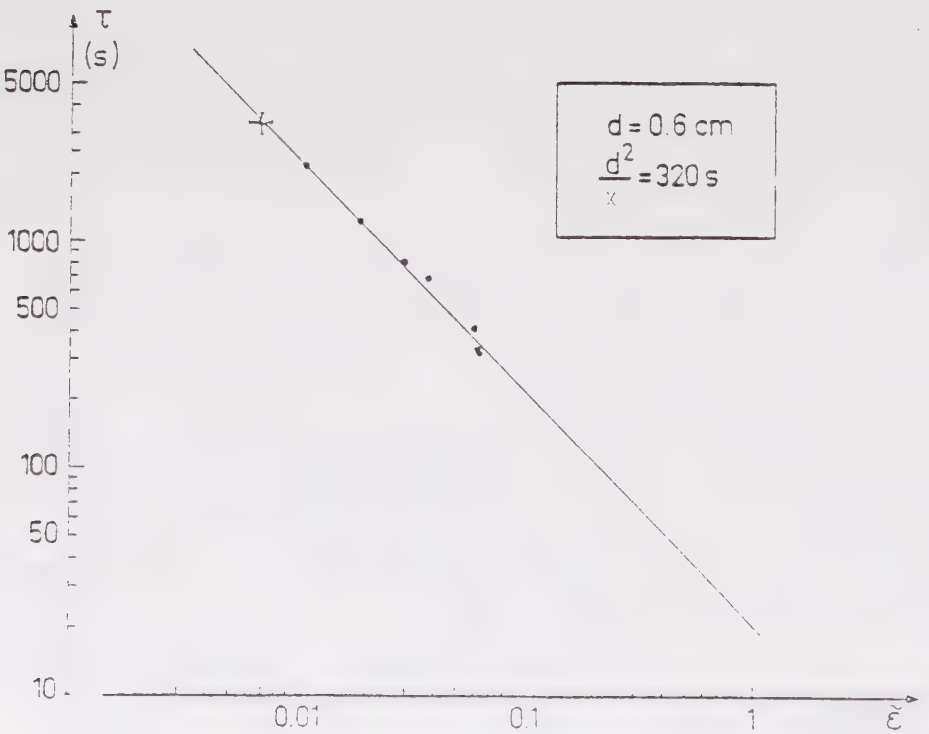


Figure 7

Variation du temps caractéristique $\tau = \sigma^{-1}$ en fonction de $\tilde{\varepsilon}$: $\tau = \tau_0 \tilde{\varepsilon}^{-1}$ où

$$\tau_0 = \frac{d^2}{\chi} \left(\frac{1 - \nu}{20 - 8\nu} \right)$$

plus haut (48) il est nécessaire de tenir compte de l'influence des parois latérales dans le traitement des équations O.B..La valeur numérique du coefficient ξ_o étant 0.54, pour des parois rigides et conductrices, on peut illustrer par deux exemples l'importance de l'effet des parois. Lorsque, $\tilde{\varepsilon} = 10^{-2}$, donc très près du seuil d'instabilité, on trouve que : $\xi \simeq 5d$. La longueur d'onde critique étant de l'ordre de 2d, on constate que l'influence d'une paroi se fait sentir à l'intérieur du fluide jusqu'au cinquième rouleau compté à partir du bord. Tout près du seuil une structure convective composée de dix rouleaux ne peut donc plus être représentée par le développement perturbatif (40) car il n'est pas possible de décrire avec un seul nombre d'onde la modulation spatiale d'amplitude résultant de la présence des parois latérales. Pour, $\tilde{\varepsilon} = 1$, la longueur d'influence ne vaut plus que $\frac{d}{2}$ et la présence des parois n'affecte que le rouleau le plus proche du bord. Cependant lorsque la dimension horizontale caractéristique du système convectif est du même ordre de grandeur que sa hauteur, d, on doit tenir compte de l'effet de parois latérales même pour des valeurs de $\tilde{\varepsilon}$ supérieures à l'unité.

II . LA CONVECTION EN MILIEU CONFINE - HISTORIQUE

On a coutume d'attribuer à Hales[18] (1937) la première étude théorique sur la convection dans les milieux entièrement confinés. C'est par le biais d'un problème de géophysique qu'il fut amené à assimiler la convection dans un geyser à la convection dans un cylindre. La situation qui l'intéressait était celle où la hauteur h du cylindre est grande devant son diamètre. Dans cette limite on peut penser que le comportement à l'intérieur du tube cylindrique n'est pas affecté par la distribution des vitesses aux extrémités. En conséquence, on choisit pour des raisons évidentes de simplicité mathématique de traiter le cas où le cylindre est limité par des parois horizontales libres. Dans ce cas les équations d'Oberbeck-Boussinesq admettent des solutions pour la température T et les trois composantes de la vitesse convective de la forme

$$\begin{aligned} T &= T(r) \cos n\phi \sin m\pi z \\ u_x &= u(r) \cos n\phi \cos m\pi z \\ u_y &= v(r) \sin n\phi \cos m\pi z \\ u_z &= w(r) \cos n\phi \sin m\pi z \end{aligned} \qquad (1)$$

où les fonctions T(r), u(r), v(r) et w(r) sont des superpositions de trois fonctions de Bessel. Les distances étant mesurées dans l'unité de longueur R, le rayon du tube, les parois latérales se trouvent localisées en r = 1 et les parois verticales en $z = \pm \frac{h}{2R}$. On appellera désormais λ le rapport d'aspect $\frac{h}{2R}$. Hales a calculé le nombre de Rayleigh critique pour deux modes angulaires, le mode axisymétrique (n = 0) et le mode antisymétrique (n = 1) et pour des valeurs d'un paramètre k défini par $k = \frac{Rm\pi}{h}$ variant de 0.1 à 0.5. Lorsqu'on s'intéresse au cas d'une seule cellule verticale (m = 1) cela revient à considérer des rapports d'aspect allant de $\lambda \simeq 16$ à 78. Beaucoup plus tard Catton et Edwards[19] (1970) ignorant apparemment le travail de Hales ont refait la même analyse. Leur mérite est d'avoir étendu le calcul du nombre de Rayleigh critique à une plus large gamme de rapports d'aspect allant de 0.25 à 16. Lorsqu'on s'intéresse à des rapports d'aspect encore plus petits ($\lambda \ll 0.25$) le comportement convectif devient fortement dépendant

dès conditions aux limites horizontales et on ne peut plus ignorer la réalité expérimentale, à savoir que dans les expériences de laboratoire les parois horizontales sont toujours rigides. L'analyse théorique correspondante a été faite à peu près en même temps par deux groupes d'auteurs : Gershuni et Zukhovitski[20] (1968 version originale, 1972 version anglaise) et par Charlson et Sani[21,22] (1970,1971). Ces auteurs utilisent la méthode de Galerkin pour résoudre les équations d'Oberbeck Boussinesq (O.B.). Toutefois leur choix de fonctions d'essais est différent et nous reviendrons plus tard sur cette question à laquelle nous avons été aussi confrontés. L'orientation des deux travaux est également différente. Gershuni et Zukhovitski ont obtenu les courbes de stabilité marginale pour des modes angulaires purs n = 0,1 et 2 et pour une gamme de rapports d'aspect allant de 0.2 à 10. C'est une situation intermédiaire entre la limite des grands et des petits rapports d'aspect. Nous avons illustré dans le tableau ci-dessous l'influence de la nature des parois horizontales sur le nombre de Rayleigh critique pour le mode n = 1 et des parois latérales conductrices

λ	Ra(libre)	Ra(rigide)	
0.25	805	1886	
0.5	1436	2543	
1	382	536	
2	250	271	Ra^*
4	224	233	
8	218	225	

Pour $\lambda = 8$ les nombres de Rayleigh dans les cas "libre" et "rigide" sont voisins et proches de la valeur asymptotique trouvée par Ostroumov[23] dans la limite du cylindre de hauteur infinie (215.6). Lorsque λ décroit le nombre de Rayleigh croit dans les deux cas, mais nettement plus vite dans le cas "rigide". Pour $\lambda = 0.25$ on tend respectivement vers les valeurs limites de 657.5 et 1707.8 qui sont les seuils d'établissement de la convection entre plaques parallèles infinies horizontalement. La valeur maximum trouvée pour $\lambda = 0.5$ est due à un changement de définition du nombre de Rayleigh lorsque R = h. Pour $h \gg R$ on adopte la définition :

$$Ra^* = \frac{\alpha g \Delta T R^4}{\nu \chi h} \qquad (2)$$

tandis que dans la limite inverse $R \gg h$ on utilise la définition

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu \chi} \qquad (3)$$

Ce choix arbitraire a été fait pour éviter de manipuler de trop grands nombres. En effet pour $\lambda = 8$ la définition (2) conduit à des nombres de Rayleigh critiques de l'ordre de 10^7. Lorsque R est proche de h mais néanmoins différent, le choix de R comme échelle de longueur caractéristique ne se justifie pas plus que celui de h et en ne retenant qu'une seule longueur caractéristique, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{R-h}{h}$ dans l'estimation des Laplaciens.

Les rapports d'aspect considérés par Charlson et Sani se situent nettement dans la limite des petits rapports d'aspect allant de $\lambda = 0.0625$ à 1. Dans leur premier article Charlson et Sani ont surtout cherché à reproduire les résultats expérimentaux de Koschmieder[24,25]. En 1970, les travaux expérimentaux en géométrie cylindrique de grande dimension horizontale avec $R \gg h$ étaient dû pour l'essentiel, d'une part à Chen et Whitehead[26] (1968), d'autre part à Koschmieder (1969). Leurs résultats étaient en désaccord apparent puisque les premiers observaient des rouleaux d'axe rectiligne, tout comme en géométrie rectangulaire, tandis que Koschmieder voyait des rouleaux en forme d'anneaux concentriques épousant parfaitement la géométrie des parois latérales. La technique utilisée par Chen et Whitehead pour induire la convection dans leur système est assez contraignante,elle consiste à éclairer le système à travers une grille horizontale de longueur d'onde bien déterminée. Une fois atteint le nombre de Rayleigh désiré on supprime le chauffage périodique et les rouleaux produits artificiellement peuvent alors évoluer librement vers un état stationnaire. Dans l'expérience de Koschmieder les rouleaux apparaissent spontanément sous le seul effet, semblait-il, du gradient vertical de température. C'est cette méthode qui semblait la plus digne de confiance et il fut dès lors admis que la forme des parois latérales déterminait la structure des modes convectifs. Ce principe fut remis en cause lorsqu'en 1972, Stork et Müller[27] présentèrent de nouveaux résultats expérimentaux obtenus d'une manière apparemment analogue à celle de Koschmieder. Dans la plupart de leurs expériences ils trouvent des rouleaux parallèles à un diamètre lorsque le rapport du diamètre à la hauteur est supérieur à 3.2. Lorsque le diamètre est très grand la structure convective est vue comme une superposition de tous les types de modes angulaires, axisymétrique

ou non. Ceci est illustré dans la Fig. 1 qui reproduit un résultat de Stork[28] pour 2R = 25. On s'est rendu compte récemment que le système de refroidissement de la plaque supérieure dans les expériences de Koschmieder, induisait un gradient radial de température ayant de plus une symétrie axiale et que cela favorisait l'apparition d'un mode convectif axisymétrique ceci étant confirmé par l'existence de rouleaux sous critiques sur la paroi externe. De toutes récentes expériences effectuées à Saclay[29] sont venues confirmer les résultats de Stork et Müller (Fig. 2) avec toutefois des restrictions possibles en ce qui concerne le caractère stationnaire ou non des structures observées. Ainsi les structures convectives d'amplitude finie obtenues dans les cylindres de grand diamètre ne seraient ni des rouleaux parfaitement droits ni des anneaux concentriques mais des structures plus compliquées formées néanmoins de rouleaux dont l'axe possède la caractéristique d'arriver perpendiculairement aux parois latérales. L'analyse linéaire de Charlson et Sani n'est d'aucun secours pour interpréter ces nouveaux résultats expérimentaux, pas plus que ne l'est l'analyse non linéaire qu'ils ont développée par la suite et qui ne concerne que le mode axisymétrique. L'analyse non linéaire tenant compte de la superposition de plusieurs modes angulaires reste donc à faire. Une telle étude pourra être entreprise lorsque nous disposerons de données expérimentales concernant le nombre de modes angulaires ayant une amplitude non négligeable. Nous ne sommes pas encore en mesure de proposer une méthode particulière de résolution du problème non-linéaire ainsi posé avec conditions aux limites horizontales et latérales. La méthode de Galerkin a déjà été utilisée par le passé pour résoudre des problèmes non linéaires[12] (Busse, 1967) mais seulement en géométrie infinie et pour des rouleaux parallèles c'est à dire lorsque les fonctions d'essai sont des fonctions d'une seule variable. Dans le chapitre suivant nous verrons un exemple d'application de la méthode de Galerkin dans le cas d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires avec conditions aux limites horizontales et latérales.

Dans ce travail nous nous sommes limités à l'étude de la convection stationnaire. Rappelons que pour un fluide donné, le seuil d'apparition des phénomènes non stationnaires dépend des dimensions horizontales de la cellule dans laquelle a lieu la convection. Le lien entre la taille de la cellule et le comportement temporel de l'écoulement a été mis en évidence expérimentalement par deux groupes d'auteurs [62] et [51],[61]. Pour ces expériences effectuées dans une cellule cylindrique remplie d'Helium liquide normal, le rapport

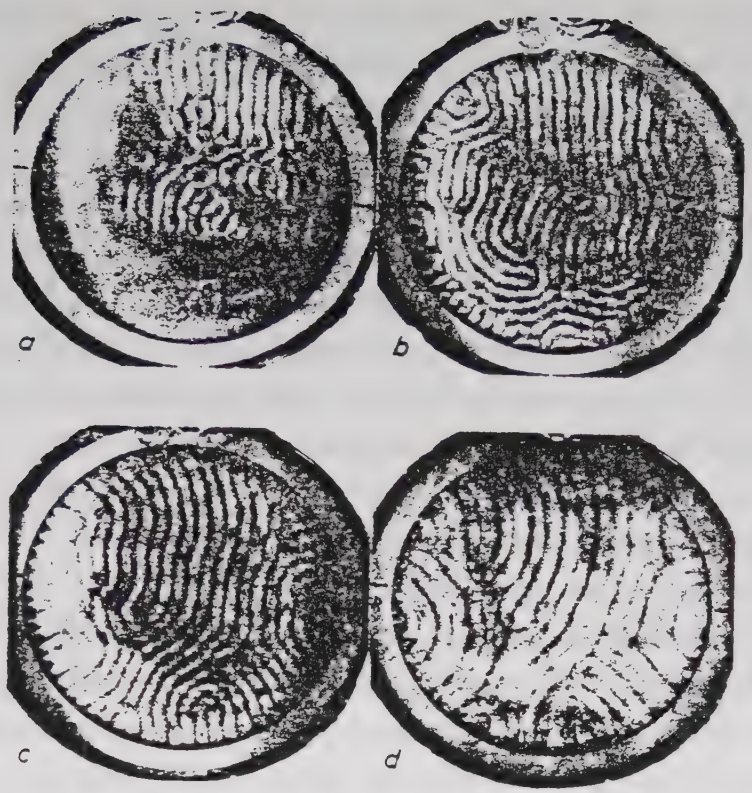


Figure 1

Reproduction d'un résultat de Stork. Convection dans un cylindre de diamètre 2R = 25d.
(a), (b) : Apparition des rouleaux ; (c) 24 rouleaux au voisinage du seuil d'instabilité ; (d) Ra = 3 Ra_c, le nombre de rouleaux est passé à 18.

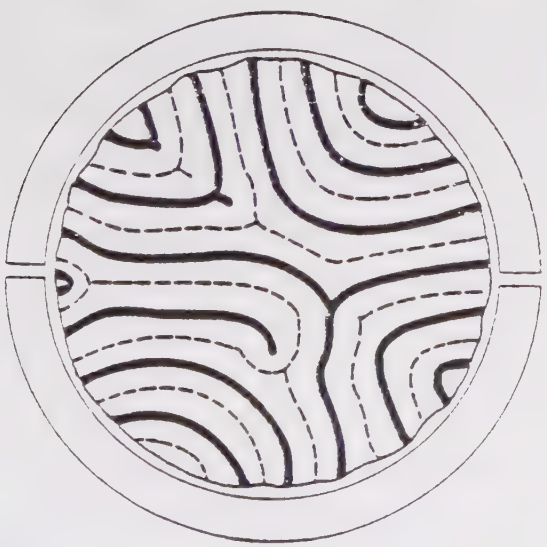


Figure 2

Schéma établi d'après une photographie prise à Saclay par V. Croquette. 2R = 20d, Ra $\simeq$ 4 Ra_c. Les pointillés représentent les zones lumineuses et les traits pleins les zones sombres de l'image obtenue par effet de focalisation.

d'aspect Γ est défini comme étant le rapport du rayon à la hauteur. La valeur $\Gamma \simeq 3$ marque la séparation entre deux types de comportement temporel. Nous reviendrons plus en détail au Chapitre V sur les phénomènes dépendant du temps qui apparaissent dans la limite des grands rapports d'aspect, $\Gamma > 3$, et qui trouvent leur origine dans les mouvements lents et erratiques de la structure convective. Dans cette limite Ahlers montre aussi que le seuil d'apparition de la turbulence peut être confondu avec le seuil de l'instabilité convective. A l'opposé dans la limite des petits rapports d'aspect, $\Gamma < 3$, le régime turbulent est précédé d'un régime monopériodique, pour $Ra > Ra_{osc}^{(1)}$, au cours duquel la vitesse, mesurée en un point du fluide, oscille avec une fréquence f_1 parfaitement définie, éventuellement accompagnée de ses harmoniques $m f_1$[64]. Ce régime est suivi d'un régime bipériodique, pour $Ra > Ra_{osc}^{(2)}$, au cours duquel la vitesse oscille avec deux fréquences f_1 et f_2, généralement incommensurables[63],[65]. Le régime turbulent est atteint pour $Ra = Ra_t$, lorsqu'un très grand nombre de fréquences sont présentes simultanément. Ce schéma de transition vers la turbulence en quatres étapes, correspondant aux bifurcations qui se produisent respectivement pour les valeurs du nombre de Rayleigh, Ra_c, $Ra_{osc}^{(1)}$, $Ra_{osc}^{(2)}$ et Ra_t, illustre bien la théorie de Ruelle et Takens[66] selon laquelle la turbulence apparaît dès qu'un nombre fini d'oscillateurs de périodes différentes sont couplés. Dans les petites boîtes cette suite de transitions n'est pas la seule possible[67], la turbulence peut aussi être crée par dédoublement de fréquence, c'est le cas lorsque la fréquence f_2 s'accroche à $\frac{f_1}{2}$, puis $\frac{f_1}{4}$ se développe à partir de $\frac{f_1}{2}$, et par ce phénomène de germination $\frac{f_1}{8}$, $\frac{f_1}{16}$,..., vont apparaître produisant un bruit de basse fréquence. Le nombre de Rayleigh auquel s'effectue la transition vers un régime périodique, $Ra_{osc}^{(1)}$, dépend du nombre de Prandtl P du fluide. Pour de l'huile aux silicones ($P = 130$) et une cellule de rapport d'aspect $\Gamma = 2$, le régime convectif stationnaire peut se maintenir jusqu'à des nombres de Rayleigh plusieurs centaines de fois plus élevés que le nombre de Rayleigh critique, typiquement $Ra_{osc}^{(1)} = 250\ Ra_c$. Dans le cas de l'Helium non superfluide dont le nombre de Prandtl est voisin de l'unité on trouve que : $Ra_{osc}^{(1)} \simeq 2\ Ra_c$. Dans les petites boîtes où l'influence des parois est poussée au maximum, chaque rouleau est ancré dans sa position et l'origine de la turbulence doit être recherchée ailleurs que dans des mouvements de la structure. La mise en évidence expérimentale des mécanismes responsables des oscillations de fréquences f_1 et f_2

a été effectuée par M. Dubois et P. Bergé[65] dans le cas d'une cellule rectangulaire de dimensions horizontales, $L_x = 2d$ et $L_y = 1.2d$, et dans la limite des grands nombres de Prandtl, le fluide utilisé étant de l'huile aux silicones. Dans cette géométrie la structure convective se compose de deux rouleaux suivant la direction x et de un ou deux rouleaux suivant la direction y. La visualisation de la structure par interférométrie différentielle, associée à des mesures de vitesse par anémométrie laser, ont permis à ces auteurs de recueillir des informations essentielles pour la compréhension des phénomènes convectifs dépendants du temps. Il ressort de leur étude que l'établissement d'un régime monopériodique est liée à la formation d'une goutte chaude (ou froide) dans un coin (et un seul) de la cellule où initialement la vitesse est faible. Dans le régime bipériodique la fréquence f_2 est celle de la pulsation de la couche limite thermique froide. Les étapes qui mènent vers la turbulence dépendent aussi de la structure convective présente dans la cellule. Dans les expériences que nous venons de citer et qui sont effectuées dans une cellule rectangulaire, le nombre de rouleaux (un ou deux) suivant la direction y détermine le comportement temporel. Lorsque deux rouleaux sont présents, le régime bipériodique est absent du schéma de transition vers la turbulence[68] décrit plus haut. Dans cette situation le régime monopériodique est immédiatement suivi d'un régime chaotique intermittent. Il est possible de donner une interprétation théorique qualitative de la transition vers la turbulence par intermittence en terme d'un modèle apparenté au modèle de Lorenz[69]. Précisons que le modèle de Lorenz consiste à tronquer les équations O.B. dépendant du temps en ne retenant que trois modes spatiaux, dont un pour le potentiel des vitesses et un pour la température qui aurons le nombre d'onde a du mode fondamental. Un second mode est retenu pour la température, qui lui n'a pas de périodicité horizontale. Le résultat de cette troncature est un système non linéaire de trois équations différentielles ordinaires :

$$\dot{X} = \sigma(Y - X)$$

$$\dot{Y} = XZ + rX - Y$$

$$\dot{Z} = -XY - bZ$$

où le point représente la dérivation par rapport au temps, et où σ et b sont deux paramètres, le nombre de Rayleigh réduit $r = Ra/Ra_c$ étant le paramètre de contrôle. En dépit de sa simplicité le système de Lorenz possède

une structure très riche[70] avec en particulier une bifurcation à $r \simeq 24.74$, lorsque $\sigma = 10$ et $b = \frac{8}{3}$, qui sépare l'état stationnaire d'un état dépendant du temps, et un attracteur étrange très bien connu jusqu'à $r \sim 50$ dont l'évolution a pu être suivi jusqu'à des valeurs de r supérieures à 200.

III. LA CONVECTION EN GEOMETRIE CYLINDRIQUE

1. Motivations

Les expériences qui nous ont conduit à nous intéresser au problème de la convection dans l'eau au voisinage de sa densité maximale, ont été réalisées par A. Azouni et sont décrites en détail dans les références[30],[31],[32]. Nous en rappelons brièvement les grandes lignes ici. Le premier travail porte sur l'étude de la congélation de suspensions aqueuses diluées ou de solutions dans un tube vertical, la source froide se trouvant à l'extrémité inférieure du tube tandis que l'extrémité supérieure se trouve à la température ambiante. L'examen a posteriori du milieu solidifié révèle une distribution hélicoïdale de particules ou de soluté. Parallèlement à l'observation visuelle, des enregistrements de température sont effectués à l'aide de thermocouples uniformément répartis sur la paroi latérale. Lorsque l'épaisseur du solide atteint une certaine hauteur des oscillations de température apparaissent au cours du temps dans le liquide. Ces oscillations ont été attribuées à un phénomène de convection instationnaire. Une interprétation plus approfondie de ces expériences se heurte à la complexité et à la multiplicité des phénomènes mis en jeu : transition de phase à l'interface glace-liquide, mobilité du front de gel, convection pénétrante au-dessus de l'isotherme 4°C. Afin d'isoler le mécanisme purement convectif un autre montage expérimental a été conçu, qui met en lumière le rôle joué par le maximum de densité massique de l'eau au voisinage de 4°C. Le liquide utilisé est maintenant de l'eau pure maintenue entre des parois horizontales rigides et régulées en température, soit 0°C pour le bas et 4°C pour le haut. A l'état stationnaire la structure spatiale du mode convectif présent dans le cylindre est partiellement caractérisée par la distribution angulaire de température relevée autour d'une section droite située à la mi-hauteur. Cette distribution angulaire est conforme aux résultats théoriques :

$$T(z,\varphi) = \bar{T}(z) + \sum_{n=1}^{N} T_n(z) \cos n\varphi \qquad (1)$$

où $\bar{T}$ est une température moyenne. En pratique, seules les amplitudes T_n des modes n = 1 et 2 ont pu être détectées avec précision. La détection conjointe de la structure verticale par des mesures électriques ou optiques n'a pas encore été effectuée. Des manifestations indirectes, comme l'apparition d'oscillations temporelles de température lorsque la hauteur du cylindre augmente, sont

les seuls indices que nous possédons sur la structure verticale du mode convectif. Il semble cependant que la nouveauté apportée par ces expériences, et qui réside dans l'asymétrie verticale engendrée par le profil parabolique de densité massique de l'eau doit se manifester dans le comportement axial de l'écoulement convectif. En général, la principale cause d'asymétrie dans les couches fluides en convection est due à une viscosité variant fortement en fonction de la température et son importance dans la formation de cellules hexagonales a été reconnue dès 1933 par Graham[33]. Le travail théorique fondamental dans ce domaine est celui de Palm[34],[35],[36] qui montre que l'asymétrie verticale est responsable de la structure hexagonale. L'absence de symétrie par rapport au plan horizontal médian peut aussi avoir pour cause des conditions aux limites mixtes, "rigide" en bas et "libre" en haut comme dans le cas de l'instabilité de Bénard.

Le travail présenté dans ce chapitre a pour but la détermination des nombres de Rayleigh critiques et des structures convectives stationnaires dans le domaine linéaire lorsqu'il existe une asymétrie verticale liée à la variation de densité massique du fluide. Les résultats de notre étude s'appliquent plus généralement à tous les fluides dont la densité est une fonction quadratique de la température avec le maximum de densité situé à l'extrémité supérieure du cylindre, ce qui exclu a priori la présence de convection pénétrante. Lorsque le sommet du cylindre d'eau est maintenu à une température supérieure à 4°C, la stratification de densité est stable au-dessus de l'isotherme 4°C, situé à la hauteur h_1. Toutefois la convection ne reste pas confinée dans la région $0 < z < h_1$, et pénètre dans la partie supérieure, $h_1 < z < h$. Selon la valeur du rapport $\frac{h_1}{h}$, la structure convective se compose alors d'une ou plusieurs cellules verticales.

2. Les équations générales de la convection

Le point de départ est l'ensemble des équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g} \quad , \tag{2}$$

l'équation de transport de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})T = \chi \Delta T \tag{3}$$

et la condition d'incompressibilité :

$$\vec{\nabla} . \vec{v} = 0 \qquad (4)$$

où $\vec{v}$ et T sont respectivement la vitesse et la température dans le fluide, p est la pression et ρ la densité, ν est la viscosité cinématique, χ la diffusivité thermique, $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur et t le temps.

L'état conductif est caractérisé par une vitesse nulle, un gradient de température linéaire :

$$T_o = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{(T_1 - T_2)}{h} z \qquad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \qquad (5)$$

où T_1 et T_2 sont respectivement les températures des plaques horizontales inférieures et supérieures. Dans l'état conductif la pression p_o varie conformément à l'équation de l'hydrostatique :

$$\vec{\nabla} p_o = \rho_o \vec{g} \qquad (6)$$

où ρ_o est une densité moyenne à partir de laquelle seront comptées les variations de densité. Si l'on introduit des perturbations de vitesse $\vec{v}$, de température θ, de pression p' et de densité ρ', les équations linéarisées gouvernant l'évolution de ces perturbations s'écriront :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_o} + \frac{\rho'}{\rho_o} \vec{g} + \nu \Delta \vec{v} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi \Delta \theta + \frac{\Delta T}{h} v_z \qquad (8)$$

$$\vec{\nabla} . \vec{v} = 0$$

où $\Delta T = T_1 - T_2$.

A partir de maintenant on va distinguer deux cas :

i) les liquides ordinaires pour lesquels la densité est une fonction linéaire de la température et dont l'équation d'état s'écrit :

$$\rho = \rho_m (1 - \alpha (T - T_m)) \qquad (9)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique, T_m et ρ_m sont respectivement

des températures-et densité de référence que l'on choisira égales à ρ_o et $\frac{T_1 + T_2}{2}$.

ii) Les liquides tels que l'eau pour lesquels la densité est une fonction quadratique de la température et dont l'équation d'état s'écrit :

$$\rho = \rho_m(1 - \beta(T-T_m)^2) \qquad (10)$$

pour l'eau $T_m = 4°C$ et donc $T_m \equiv T_2$.
Dans le cas i) la perturbation de densité ρ' s'exprime en fonction de la perturbation de température θ par la relation :

$$\rho' = -\alpha\rho_o\theta \quad , \qquad (11)$$

le terme en $\alpha\rho_o \frac{\Delta T}{h} z$ étant incorporé ultérieurement au terme de pression figurant dans (7).
Dans le cas ii) on aura :

$$\rho' = -\beta\rho_o\left(\theta + \frac{\Delta T}{d}\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)\right)^2 \qquad (12)$$

Cette expression contient un terme quadratique en θ dont nous ne tiendrons pas compte dans l'approximation linéaire. Quant au terme proportionnel à ΔT^2 il sera incorporé au terme de pression dans (7). Dorénavant nous considérerons des quantités sans dimension exprimées dans les unités suivantes : R pour les longueurs, $\frac{\chi}{R}$ pour les vitesses, $|\Delta T| \frac{R}{h}$ pour la température, $\frac{R^2}{\chi}$ pour le temps et $\frac{\nu \chi \rho_o}{R^2}$ pour la pression. Dans le cas des liquides ordinaires les équations (7) et (8) se mettent sous la forme :

$$P^{-1} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \vec{\nabla}\varpi + Ra\,\theta\hat{e}_z + \Delta\vec{v} \qquad (13a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta\theta + v_z \qquad (13b)$$

où ϖ est la pression, $\hat{e}_z$ le vecteur unitaire suivant la verticale ascendante et P le nombre de Prandtl. Le nombre de Rayleigh Ra est défini par :

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T R^4}{\nu \chi h} \qquad (14)$$

Dans le cas de l'eau les équations (7) et (8) prennent la forme :

$$P^{-1} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \vec{\nabla} \varpi + Ra\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right) \theta \hat{e}_z + \Delta \vec{v} \qquad (15a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta - v_z \qquad (15b)$$

où cette fois le nombre de Rayleigh est défini par :

$$Ra = \frac{\beta g |\Delta T|^2 R^4}{\nu \chi h} \qquad (16)$$

et où l'on a introduit le rapport d'aspect $\lambda = \frac{h}{2R}$.
Aux équations (13a,b) et (15a,b) nous devons adjoindre la condition d'incompressibilité (4) et les conditions aux limites que nous allons préciser maintenant. Sur les parois horizontales nous prendrons :

$$\vec{v} = \theta = 0 \qquad \text{à} \qquad z = \pm\lambda \qquad (17)$$

de manière à recréer les conditions expérimentales citées plus haut. Les parois latérales sont rigides :

$$\vec{v} = 0 \qquad \text{à} \qquad r = 1 \qquad (18)$$

et la condition thermique sur ces parois sera de la forme :

$$\theta = \mathcal{B} \frac{\partial \theta}{\partial r} \qquad \text{à} \qquad r = 1 \qquad (19)$$

où $\mathcal{B}$ est un nombre de Biot qui vaut zéro lorsque les parois latérales sont conductrices et qui est infini lorsque ces parois sont isolantes.
Les équations (13a,b) ont déjà été résolues avec les conditions (17), (18) et (19) pour certaines valeurs de λ et pour certains modes angulaires.
Par la suite nous aurons l'occasion de compléter où d'améliorer ces résultats, mais notre travail original portera sur la résolution des équations (15a,b).
Le but de notre étude est de préciser les structures convectives et les nombres de Rayleigh critiques lorsque l'équation d'état est de la forme (10). Pour cela nous choisirons des solutions dont la dépendance temporelle est de la forme $e^{\sigma t}$, où σ est le taux de croissance de l'instabilité. Dans ces conditions

les équations (13a,b) et (15a,b) peuvent se mettre sous la forme :

$$\sigma \varphi_\kappa = \mathscr{L}_{\kappa\nu} \varphi_\nu - \partial_\kappa \varpi \qquad (20)$$

où φ est un vecteur à quatre composantes :

$$(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4) \equiv (v_x,v_y,v_z,\theta)$$

et

$$\partial_\kappa = (\partial_x,\partial_y,\partial_z,0)$$

et où $\mathscr{L}_{\kappa\nu}$ est un opérateur différentiel matriciel. Nous définirons un produit scalaire :

$$\langle \varphi\varphi' \rangle = \int d\vec{r}\ \varphi^*(\vec{r})\varphi'(\vec{r}) = \int d\vec{r}(\vec{v}^*.\vec{v}' + P\ Ra\ \theta^*\theta')$$

où l'astérisque désigne la conjugaison complexe et où l'intégration s'effectue sur tout le volume de la cellule. Les équations (13a,b) impliquent alors que l'opérateur $\mathscr{L}_{\kappa\nu}$ est hermétique et ses valeurs propres σ sont réelles. Dans l'équation (15a) la présence du terme en $\frac{z}{\lambda}$ introduit une asymétrie verticale qui se manifeste par la non-hermiticité de l'opérateur $\mathscr{L}_{\kappa\nu}$. Dans ce cas les valeurs propres σ sont éventuellement complexes et l'état de stabilité marginale est atteint lorsque la partie réelle de σ s'annule. Lorsque la partie imaginaire demeure finie on dit que les solutions sont des modes surstables, c'est à dire qu'elles oscillent dans le temps avec une pulsation égale à la partie imaginaire de σ. Nous allons examiner dans le paragraphe suivant si de tels modes peuvent réellement exister dans un cylindre d'eau soumis à un gradient vertical de 0 - 4°C.

3. Modes surstables

Les équations qui régissent le problème sont :

$$P^{-1}\ \sigma\ \vec{v}\ - \Delta\vec{v} = -\vec{\nabla}\varpi + Ra\,\hat{e}_z\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)\theta \qquad (21)$$

$$\sigma\theta - \Delta\theta = -v_z \qquad (22)$$

Multiplions l'équation (21) par $\vec{v}^*$ et intégrons sur tout le volume du cylindre, il vient

$$P^{-1}\,\sigma\langle|\vec{v}|^2\rangle - \langle\vec{v}^*.\Delta\vec{v}\rangle = Ra\,\langle v_z^*\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)\theta\rangle \qquad (23)$$

Prenons maintenant l'expression conjuguée de (22) que nous multiplierons par θ. Après intégration il vient :

$$\sigma\langle|\theta|^2\rangle - \langle\theta\Delta\theta^*\rangle = -\langle\theta v_z^*\rangle \qquad (24)$$

Combinant les équations (23) et (24) on obtient :

$$P^{-1}\,\sigma\langle|\vec{v}|^2\rangle - \langle\vec{v}^*.\Delta\vec{v}\rangle = Ra\left[\frac{\langle zv_z^*\theta\rangle}{\lambda} + \sigma^*\langle|\theta|^2\rangle - \langle\theta\Delta\theta^*\rangle\right] \qquad (25)$$

Comme nous sommes intéressés par la stabilité marginale nous remplacerons dès maintenant σ par $i\sigma$. Egalant les parties imaginaires de (25) on obtient :

$$\sigma\left[P^{-1}\langle|v|^2\rangle + \langle|\theta|^2\rangle\right] = \frac{Ra}{\lambda}\ \mathrm{Im}\langle zv_z^*\theta\rangle \qquad (26)$$

Dans le cas des fluides ordinaires où le membre de droite est nul on ne peut satisfaire (26) que lorsque $\sigma = 0$. Ici par contre la présence du terme $\langle zv_z^*\theta\rangle$ offre la possibilité de trouver une valeur de σ non nulle. Nous allons montrer par un calcul approché que cette éventualité est tout de même fort peu probable. Nous utiliserons la méthode de Galerkin en ne retenant qu'une seule fonction d'essai pour la vitesse et pour la température soit :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= a_1\vec{v}_1\\ \theta &= b_1\theta_1\end{aligned} \qquad (27)$$

où les coefficients a_1 et b_1 sont complexes et où les fonctions $\vec{v}_1$ et θ_1 sont réelles et peuvent être par exemple les mêmes qu'au paragraphe (5). La méthode de Galerkin fournit les relations :

$$\left[P^{-1}\ i\sigma\langle v_1^2\rangle - \langle\vec{v}_1.\Delta\vec{v}_1\rangle\right]a_1 = Ra\,\langle v_{1z}\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)\theta_1\rangle\, b_1 \qquad (28)$$

$$\left[i\sigma\langle\theta_1^2\rangle - \langle\theta_1\Delta\theta_1\rangle\right]b_1 = -a_1\langle v_{1z}\,\theta_1\rangle \qquad (29)$$

Si l'on pose :

$$a_1 = a' + ia''$$

$$b_1 = b' + ib''$$

l'égalité des parties réelles et imaginaires de (28) et (29) nous donne quatre relations pour les quatre inconnues a',a" et b' et b" soit :

$$-P^{-1}\,\sigma\langle v_1^2\rangle a'' - \langle \vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{v}_1\rangle a' = Ra\langle v_{1z}\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)\theta_1\rangle b' \qquad (30)$$

$$P^{-1}\,\sigma\langle v_1^2\rangle a' - \langle \vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{v}_1\rangle a'' = Ra\langle v_{1z}\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)\theta_1\rangle b'' \qquad (31)$$

$$\sigma\langle\theta_1^2\rangle b'' + \langle\theta_1\Delta\theta_1\rangle b' = a'\langle v_{1z}\theta_1\rangle \qquad (32)$$

$$\sigma\langle\theta_1^2\rangle b' - \langle\theta_1\Delta\theta_1\rangle b'' = -a''\langle v_{1z}\theta_1\rangle \qquad (33)$$

Pour simplifier la suite du calcul on désignera chacune des intégrales par une lettre soit :

$$\begin{aligned}
&\langle\theta_1^2\rangle = A \\
&\langle\theta_1\Delta\theta_1\rangle = -\langle\vec{\nabla}\theta_1 \cdot \vec{\nabla}\theta_1\rangle = -B \\
&\langle v_{1z}\theta_1\rangle = C \\
&\langle|\vec{v}_1|^2\rangle = D \qquad (34) \\
&\langle\vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{v}_1\rangle = -\langle\vec{\nabla}\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}\vec{v}_1\rangle = -E \\
&\langle v_{1z}\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)\theta_1\rangle = F
\end{aligned}$$

où les quantités A, B, D et E sont positives et les quantités C et F n'ont pas de signe déterminé. Reportant dans (30) et (31) les expressions de a' et a" déduites de (32) et (33), on obtient un système algébrique pour b' et b" :

$$\left.\begin{aligned} S\,b' + \sigma Q\,b'' &= 0 \\ -\sigma Q\,b' + S\,b'' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

avec :

$$S = P^{-1}\,\sigma^2\,AD - BE - Ra\,CF$$

et

$$Q = P^{-1}\,BD + AE$$

Le système (35) n'a de solution non triviale que si son déterminant est nul :

$$S^2 + \sigma^2 Q^2 = 0$$

Le membre de gauche étant une somme de carrés, il ne peut être nul que si chacun des termes est nul :

$$S^2 = 0 \qquad (36a)$$

$$\sigma^2\,Q^2 = 0 \qquad (36b)$$

La deuxième égalité ne peut être vérifiée que si $\sigma = 0$ car $Q^2 > 0$. Satisfaire $S^2 = 0$ dans ces conditions revient à calculer le nombre de Rayleigh critique des modes stationnaires soit :

$$Ra = -\frac{BE}{CF}$$

Le calcul qui précède met en lumière le terme qui joue un rôle important dans l'apparition de modes surstables. Ce terme est Q et il doit pouvoir s'annuler pour qu'il y ait surstabilité. Or le changement par rapport au cas des liquides ordinaires se situe dans le terme F qui habituellement vaut - C. Ce changement se traduit par une modification du nombre de Rayleigh critique mais n'offre vraisemblablement pas la possibilité d'induire des modes surstables. Dans la suite du calcul l'état de stabilité marginale sera caractérisé par σ réel et égal à zéro. Dans le cas de l'instabilité de Taylor-Couette, Chandrasekhar[37] arrive au même résultat par des arguments reposant sur l'évidence expérimentale. Rappelons que c'est Veronis[38] qui a souligné l'analogie qui existe entre l'instabilité de Taylor-Couette ordinaire et l'instabilité de Rayleigh-Bénard dans le cas de l'eau. Dans l'instabilité de Taylor-Couette, les équations du mouvement pour des perturbations axisymétriques s'écrivent :

$$(D^2-a^2)(D^2-a^2-\sigma)u = \Omega(x)v \qquad (37a)$$

$$(D^2-a^2-\sigma)v = -T\,a^2 u \qquad (37b)$$

où :

$$\Omega(x) = 1-(1-\mu)x \quad \text{et } D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$$

avec les conditions aux limites :

$$u = Du = v = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } 1$$

Dans ce problème T représente le nombre de Taylor, $\mu = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ est le rapport des vitesses angulaires du cylindre extérieur et du cylindre intérieur, a est le nombre d'onde vertical. En se servant de la relation d'incompressibilité, l'équation (21) peut se ramener à une équation pour la composante v_z de la vitesse :

$$(P^{-1}\sigma-\Delta)\Delta v_z = Ra\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)\Delta_1\theta \qquad (38)$$

où Δ_1 représente le Laplacien horizontal. Dans le cas de la convection entre plaques parallèles infinies les équations (22) et (39) se mettent sous une forme analogue à (37) et (38). Dans ce cas on n'a jamais mis en évidence de modes surstables, que ce soit expérimentalement ou théoriquement, et il ne semble pas que le fait d'ajouter des parois latérales apporte un changement sur ce point. Le seul exemple de modes surstable dans l'instabilité de Taylor-Couette a été trouvé théoriquement par Krueger, Gross et Di Prima[39] dans le cas de perturbations de vitesse non-axisymétriques. Les équations (17) et (18) sont alors remplacées par :

$$L(D^2-a^2)u = -a^2T\,\Omega(x)v \qquad (39a)$$

$$Lv = u \qquad (39b)$$

avec :

$$L = D^2-a^2-i[\sigma + k\sqrt{T}\,\Omega(x)]$$

où k est un paramètre qui dépend du mode angulaire. Si nous recherchons dans ce cas la présence de modes surstables par un calcul à l'ordre le plus bas de la méthode de Galerkin, on s'aperçoit que les quantités A, B, D et E définies positives dans le calcul précédent sont maintenant remplacées par des quantités

de signe indéterminé. Cela offre la possibilité à Q de s'annuler et donc on s'attend à trouver des modes surstables. C'est ce que confirme le calcul plus complet de Krüeger et al qui montrent que pour $\mu < -0.78$ il existe à l'état de stabilité marginale des modes non-axisymétriques oscillant avec une certaine fréquence.

Pour compléter cette étude nous mentionnerons les modes surstables qui apparaissent dans un fluide à deux composants. Lorsqu'un fluide à deux composants est soumis à un gradient de température, il se produit une séparation des deux composants par effet Soret et le gradient de densité dû au gradient de température est déformé par la contribution à la densité locale provenant de la variation de concentration. La contribution due à la concentration peut renforcer ou au contraire réduire le gradient de densité induit par le gradient de température selon la direction de migration du composant le plus dense qui est liée au signe du coefficient de Soret. Par convention le signe du coefficient de Soret est positif lorsque le composant le plus dense migre vers la région la plus froide. Lorsque la couche de fluide est chauffée par le bas Schechter et al[40] prévoient l'apparition de modes surstables quand le nombre de Soret est inférieur à une certaine valeur négative. La situation correspondante est schématisée sur la Fig. 1 où une couche de fluide froid et peu dense surplombe une couche de fluide chaud et dense. Le gradient de concentration en l'absence de gradient thermique conduirait à une stratification stable de la densité mais la présence du gradient thermique est destabilisante. Supposons qu'au niveau de l'interface des deux liquides une fluctuation déplace une goutte de fluide dense et chaud de sa position initiale (a) et l'amène dans la couche supérieure. Dans sa nouvelle position (b) la goutte va se mettre rapidement à l'équilibre thermique avec son entourage mais le temps de diffusion moléculaire étant beaucoup plus faible que le temps de diffusion thermique elle restera plus lourde que son entourage et étant froide et dense retournera à sa position initiale dans la couche inférieure (c). Toutefois la perte de masse si minime soit-elle qu'elle aura subi pendant son séjour dans la couche supérieure et son aptitude à se réchauffer rapidement vont la rendre globalement plus légère que son entourage et elle aura donc tendance à monter vers la couche supérieure, amorçant ainsi une suite d'oscillations. Dans la Fig. 1, c_1, c_2, c_3, représentent trois concentrations différentes.

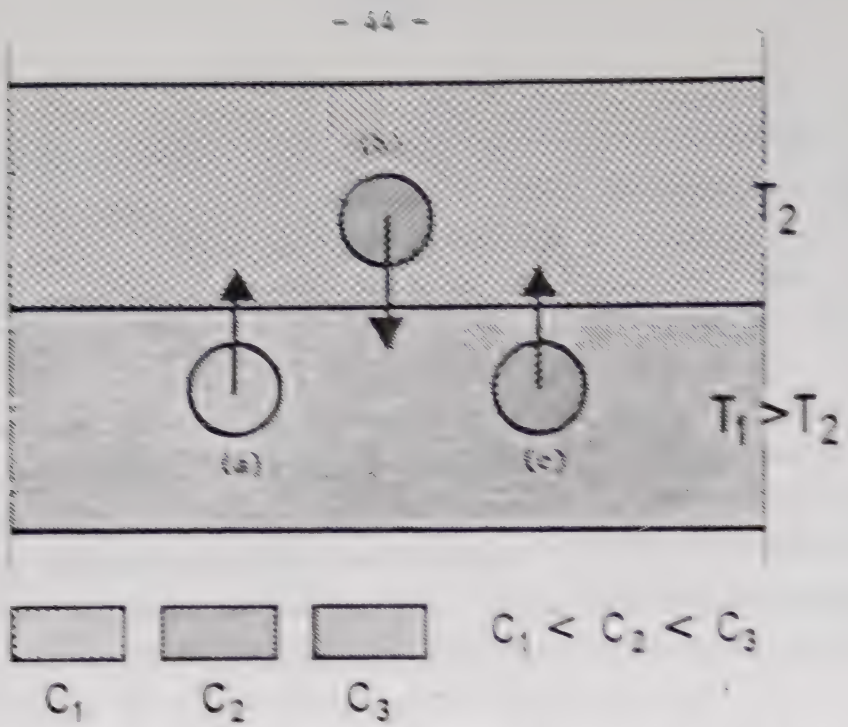


Figure 1 : Schéma de la convection oscillante dans un fluide à deux composants.

Un autre exemple, qui n'a pas encore été étudié du point de vue de la surstabilité et qui se prête bien à cette éventualité est le cas, très intéressant pour les géophysiciens, des fluides dont la viscosité varie fortement en fonction de la température. Lorsque la viscosité η varie linéairement en fonction de la température, soit :

$$\eta = \eta_0 [1 + \gamma (T - T_0)] \quad ,$$

où η_0 et T_0 sont des valeurs de références prises à la mi-hauteur de la cellule, les équations du mouvement (I.3a) prennent la forme :

$$P^{-1} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\pi + Ra\, \theta \vec{e}_z + \Delta \vec{w} + \gamma\, \vec{\nabla} \times \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} + \vec{\nabla} \times \vec{\omega}_z$$

où

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{w}$$

Lorsqu'on cherche la présence de modes surstables par la méthode de Galerkin, le changement par rapport à l'approximation I.B. se manifeste par le fait que l'intégrale I_{34} est maintenant remplacée par la quantité

$$\overline{\eta \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z}} = \overline{\eta_0 [1 + \gamma (T - T_0)] \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z}}$$

qui n'a pas de signe déterminé. En particulier si E' < 0 l'égalité (36b) peut être vérifiée avec Q = 0 sans avoir à imposer σ = 0.

4. Méthode de Galerkin

La méthode des résidus pondérés et son cas particulier la méthode de Galerkin, sont des méthodes générales de résolution des équations différentielles. Le principe consiste à chercher des solutions approchées qui satisfont seulement partiellement les conditions du problème. La solution approchée est décomposée sur une base de fonctions d'essai contenant des paramètres arbitraires choisis de manière à donner la meilleure approximation. On se propose d'appliquer la méthode de Galerkin aux équations (21) et (22) dans lesquelles on aura pris σ égal à zéro, soit :

$$\vec{\nabla}\varpi + Ra\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)\theta\,\hat{e}_z + \Delta\vec{v} = 0 \qquad (41a)$$

$$\Delta\theta - v_z = 0 \qquad (41b)$$

auxquelles on ajoutera la condition d'incompressibilité (4) et les conditions aux limites : $\vec{v} = \theta = 0$ en $z = \pm\lambda$ et $r = 1$. Les fonctions d'essai pour la vitesse et la température seront de la forme :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} A_i \vec{v}_i \qquad (42a)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} B_i \theta_i \qquad (42b)$$

où les fonctions $\vec{v}_i$ et θ_i satisfont les conditions aux limites et la condition d'incompressibilité. Les fonctions d'essai (42a,b) sont substituées dans le système d'équations aux dérivées partielles (41) pour former les résidus :

$$\vec{R}_1(A_i, B_i, \vec{r}) = -\vec{\nabla}\varpi + Ra\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)\hat{e}_z \sum_{i=1}^{n} B_i\theta_i + \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta\vec{v}_i$$

$$R_2(A_i, B_i, \vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} B_i \Delta\theta_i - \sum_{i=1}^{n} A_i v_{iz}$$

Si les fonctions d'essais étaient des solutions exactes les résidus seraient nuls. Dans la méthode des résidus pondérés, les coefficients constants A_i et B_i sont choisis de manière à rendre nulles les intégrales pondérées de ces résidus. Dans la méthode de Galerkin les poids sont les fonctions d'essai elles-mêmes ce qui donne pour notre problème les relations :

$$\langle \vec{v}_i . \vec{R}_1 \rangle = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{43a}$$

$$\langle \theta_i , R_2 \rangle = 0 \tag{43b}$$

Dans la méthode des collocations les poids sont des fonctions de Dirac, ce qui impose au résidu d'être nul en N points du domaine considéré. Pour plus de détail sur la méthode des résidus pondérés et ses variantes nous renvoyons à l'ouvrage de Finlayson[41]. Lorsqu'on a affaire à un système d'équations aux dérivées partielles comme (41a,b) et qu'il existe dans ce système une équation qui admet une résolution exacte, on peut se servir de ce résultat pour réduire le nombre de fonctions inconnues. Dans notre cas particulier cela revient à considérer seulement la décomposition (42,a) pour la vitesse et à résoudre ensuite :

$$\Delta\theta = \sum_{i=1}^{N} A_i \, v_{iz}$$

On obtient alors une expression pour la température de la forme :

$$\theta = \sum_{i=1}^{N} A_i \, \theta_i$$

où θ_i est la solution exacte de :

$$\Delta\theta_i = v_{iz}$$

et qui comparée à (42,b) a l'avantage de ne pas introduire de nouveaux coefficients inconnus. Dans le paragraphe 6 où la méthode de Galerkin portera seulement sur la dépendance verticale avec :

$$v_z = \cos n\varphi \, u(r) \sum_{i=1}^{n} A_i W_i(z)$$

c'est ce formalisme que nous adopterons. Les équations (43a,b) se réduisent alors au système d'équations algébriques pour les coefficients inconnus A_i :

$$\sum_{i=1}^{N} A_i [Ra \, P_{ij} + Q_{ij}] = 0 \qquad j = 1,\ldots,N \tag{44}$$

où :

$$P_{ij} = \langle v_{iz} \left(\frac{z}{\lambda} - 1 \right) \theta_j \rangle$$

et

$$Q_{ij} = \langle \vec{v}_i . \Delta \vec{v}_j \rangle$$

L'existence de solutions non triviales est assurée lorsque le déterminant de la matrice M dont les coefficients sont :

$$M_{ij} \equiv Ra\ P_{ij} + Q_{ij} \quad , \tag{45}$$

est nul. C'est la relation :

$$\det M = 0$$

qui fixe la valeur du nombre de Rayleigh critique. Dans la première approximation de Galerkin, le nombre de Rayleigh critique est donné par la formule :

$$Ra_c = - \frac{Q_{11}}{P_{11}}$$

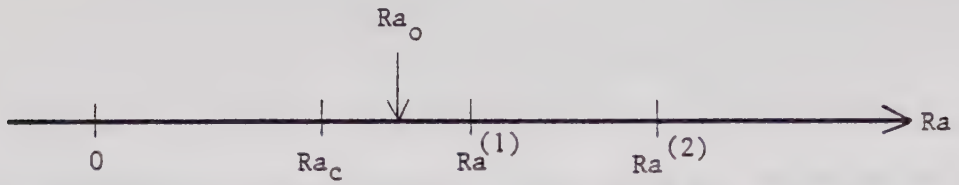
Dans la seconde approximation de Galerkin le déterminant à annuler est un polynôme du second degré en Ra dont on doit extraire la plus petite racine positive. Dans la troisième approximation et au-delà, le nombre de Rayleigh critique est déterminé numériquement par la méthode de Newton qui utilise la formule de récurrence :

$$Ra_{m+1} = Ra_m - \frac{D}{D'} \tag{46}$$

où D est le déterminant que l'on cherche à annuler et D', sa dérivée par rapport à la variable Ra. Pour initialiser le processus on choisira comme valeur, Ra_o, le nombre de Rayleigh critique calculé à l'approximation précédente ou même :

$$Ra_o = 0$$

qui donne une convergence tout aussi rapide et parfois même meilleure. C'est ce qui se produit dans la limite des petits rapports d'aspect où le nombre de Rayleigh critique du premier mode excité est très proche de celui du fondamental. Cette situation est illustrée dans le schéma suivant :



où Ra_c est le nombre de Rayleigh critique cherché et $Ra^{(1)}$, $Ra^{(2)}$ les nombres de Rayleigh critiques des premier et deuxième modes excités. Lorsqu'on initialise la méthode de Newton avec le nombre de Rayleigh Ra_o représenté par la flèche la probabilité de converger vers $Ra^{(1)}$ plutôt que $Ra^{(2)}$ est importante. Tandis qu'en partant de zéro on atteindra Ra_c par valeurs inférieures sans rencontrer d'autres racines du déterminant. Pour pouvoir appliquer la formule (45) il faut connaître la forme explicite de la dérivée D'. En fait nous calculerons directement la quantité $\frac{D'}{D}$. Les éléments de matrice M_{ij} étant des fonctions linéaires de Ra, on vérifiera que :

$$\frac{D'}{D} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} P_{ij} M^{-1}_{ji} \qquad (47)$$

où M^{-1} est la matrice inverse de M. En général la méthode de Newton converge en moins de 7 itérations.

Dans le paragraphe 7 nous appliquerons la méthode de Galerkin dans sa formulation la plus générale c'est à dire en utilisant des fonctions d'essai indépendantes pour la vitesse et la température, du type (42a,b). De plus les solutions seront représentées par une superposition de modes radiaux et de modes axiaux, ce qui conduit à prendre pour v_z et θ des expressions de la forme :

$$v_z = \cos n\varphi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} A_{ij} W_{ij}(r,z) \qquad \text{avec} \qquad W_{ij} = u_i(r) g_j(z) \qquad (48)$$

$$\theta = \cos n\varphi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} B_{ij} \mathscr{C}_{ij}(r,z) \quad \text{avec} \quad \mathscr{C}_{ij} = \tau_i(r) \beta_j(z) \qquad (49)$$

Dans ce cas la marche à suivre pour résoudre (43a,b) comporte les étapes suivantes :

i) On exprime les coefficients B_{ij} en fonctions des coefficients A_{ij} en résolvant le système algébrique issu de la condition (43,b) soit

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} B_{ij}\langle \mathcal{C}_{\mu\nu}\Delta\mathcal{C}_{ij}\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} A_{ij}\langle \mathcal{C}_{\mu\nu}W_{ij}\rangle \qquad (50)$$

ii) On reporte l'expression des B_{ij} ainsi déterminés dans l'équation (43a) généralisée soit :

$$Ra\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} B_{ij}\langle W_{\mu\nu}\left(\frac{z}{\lambda}-1\right)\mathcal{C}_{ij}\rangle + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} A_{ij}(\vec{v}_{\mu\nu}\cdot\Delta\vec{v}_{ij}) = 0 \qquad (51)$$

La dimension de la matrice dont on calcule le déterminant est $(N\times M)\times(N\times M)$ et ce nombre atteindra parfois 25 × 25. Le calcul des éléments de matrice suivant :

$$I^{(1)}_{ij\mu\nu} = \langle \mathcal{C}_{\mu i}\,\Delta\,\mathcal{C}_{\nu j}\rangle \qquad (52a)$$

$$I^{(2)}_{ij\mu\nu} = \langle \mathcal{C}_{\mu i}\,W_{\nu j}\rangle \qquad (52b)$$

$$I^{(3)}_{ij\mu\nu} = \langle W_{\mu i}\left(\frac{z}{\lambda}-1\right)\mathcal{C}_{\nu j}\rangle \qquad (52c)$$

$$I^{(4)}_{ij\mu\nu} = \langle \vec{v}_{\mu i}\cdot\Delta\vec{v}_{\nu j}\rangle \qquad (52d)$$

a été reporté en Annexe A, le choix des fonctions d'essai étant discuté dans le paragraphe suivant. Dans les expressions (50), (51) et (52a,b,c,d) le symbole < > représente l'intégration sur les variables r et z seulement, l'intégration sur la variable φ, qui est triviale ayant déjà été effectuée.

5. Choix des fonctions d'essais pour la vitesse

Il est commode d'éliminer du problème l'équation de continuité en introduisant la représentation générale pour un champ de vitesse solénoïdal :

$$\vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \qquad (53)$$

Les composantes de la vitesse s'écrivant alors :

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \tag{54a}$$

$$v_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \tag{54b}$$

$$v_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right] \tag{54c}$$

Lorsqu'on prend le rotationnel de (41a) on obtient pour la composante verticale :

$$\Delta\left(-\Delta_2 A_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right)\right) = 0 \tag{55}$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{56}$$

et

$$\Delta_2 = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{57}$$

On peut toujours mettre la composante horizontale de $\vec{A}$,soit :

$$\vec{A}_\perp \equiv A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi \quad , \tag{58}$$

sous la forme générale :

$$\vec{A}_\perp = \vec{\nabla} \times \mathfrak{p}\, \vec{e}_z \tag{59}$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \tag{60}$$

L'équation(55)se réduit alors à :

$$\Delta \Delta_2 A_z = 0 \tag{61}$$

où $\Delta_2 A_z$ représente la composante verticale de la vorticité soit ω_z. Busse a montré dans le cas d'une couche horizontale infinie qu'il existait des états stationnaires tels que $\omega_z = 0$ et donc $A_z = 0$. Admettons que cette propriété reste vraie en présence de parois latérales. La composante horizontale du rotationnel de (41a) s'écrit :

$$\text{Ra rot } \theta \vec{e}_z - \Delta^2 \vec{A}_\perp = 0 \tag{62}$$

où

$$\Delta \vec{A}_\perp = \left(\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left(\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) A_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi$$

Introduisons l'opérateur $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L} \equiv \Delta - \frac{1}{r^2} \tag{63}$$

Les deux composantes de l'équation vectorielle (62) se mettent sous la forme :

$$\frac{Ra}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \left(\mathscr{L}^2 - \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) A_r - 2 \left(\frac{1}{r^2} \mathscr{L} + \mathscr{L} \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \tag{64a}$$

$$- Ra \frac{\partial \theta}{\partial r} + \left(\mathscr{L}^2 - \frac{4}{r^4} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} \right) A_\varphi + 2 \left(\frac{1}{r^2} \mathscr{L} + \mathscr{L} \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = 0 \tag{64b}$$

Nous poserons

$$\theta = \sin n\varphi \; \tau(r,z)$$

$$A_r = \cos n\varphi \, \mathscr{A}_r(r,z)$$

$$A_\varphi = \sin n\varphi \, \mathscr{A}_\varphi(r,z)$$

Dans ces conditions les expressions (64a,b) se mettent sous la forme

$$Ra\ n\ \frac{\theta}{r} + L^2 \mathscr{H}_r + 2n\left(\mathscr{L}\ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\ \mathscr{E}\right)(\mathscr{H}_r - \mathscr{H}_\varphi) = 0 \qquad (65a)$$

$$Ra\ \frac{\partial\theta}{\partial r} + L^2 \mathscr{H}_\varphi - 2n\left(\mathscr{L}\ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\ \mathscr{E}\right)(\mathscr{H}_r - \mathscr{H}_\varphi) = 0 \qquad (65b)$$

où

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(n+1)^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Ces équations sont la généralisation de l'équation trouvée par Clever et Catton[42] dans le cas du mode axisymétrique et qui se reduisait alors à :

$$Ra\ \frac{\partial\theta}{\partial r} + L^2\ \mathscr{H}_\varphi = 0$$

En additionnant (65a) et (65b) on obtient :

$$Ra\left(\frac{n}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\theta + L^2(\mathscr{H}_r + \mathscr{H}_\varphi) = 0 \qquad (66a)$$

Puis en soustrayant (65b) de (65a) il vient :

$$Ra\left(\frac{n}{r} - \frac{\partial}{\partial r}\right)\theta + L'^2(\mathscr{H}_r - \mathscr{H}_\varphi) = 0 \qquad (66b)$$

où

$$L' = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(n-1)^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Pour résoudre (66a) et (66b) par la méthode de Galerkin il est souhaitable de choisir comme fonctions d'essai pour $\mathscr{H}_r + \mathscr{H}_\varphi$ les fonctions propres de l'opérateur L^2. De même les fonctions d'essai pour $\mathscr{H}_r - \mathscr{H}_\varphi$ seront les fonctions propres de L'^2 ce qui conduit aux expressions suivantes :

$$\mathscr{H}_r + \mathscr{H}_\varphi = \sum_{i=1}^{N} C_i\ J_{n+1}(\alpha_i r) + C'_i\ I_{n+1}(\beta_i r) \qquad (67a)$$

$$\mathscr{H}_r - \mathscr{H}_\varphi = \sum_{i=1}^{N} D_i\ J_{n-1}(\gamma_i r) + D'_i\ I_{n-1}(\delta_i r) \qquad (67b)$$

En fait les fonctions d'essai (67a,b) n'ont encore jamais été utilisées car dans ce formalisme les conditions aux limites sur la vitesse ne s'expriment pas facilement.

Rappelons que Charlson et Sani utilisent les fonctions d'essai suivantes :

$$A_\varphi = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} \sum_{n=1}^{M} B_{ijn} \frac{Y_i(r)}{r} X_j(z) \cos n\varphi \qquad (68a)$$

$$A_r = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} \sum_{n=1}^{M} D_{ijn} \frac{Y_i(r)}{r} X_j(z) \sin n\varphi \qquad (68b)$$

où les fonctions $Y_i(r)$ sont les fonctions propres du problème suivant :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(n+1)^2}{r^2}\right]^2 \frac{Y(r)}{r} = \xi^4 \, Y(r)$$

avec $Y(r) = Y'(r) = 0$ en $r = 0$ et 1. Dans le formalisme de Charlson et Sani les fonctions A_φ et A_r ne satisfont pas (60), il y a donc, deux ensembles de coefficients B_{ijn} et D_{ijn} à déterminer. Dans la suite du calcul nous avons utilisé le formalisme de Gershuni et Zukhovitskii qui consiste à utiliser la représentation (59) des solutions de (60). De cette façon on se ramène à la détermination d'un seul ensemble de coefficients en posant

$$\phi = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} \sum_{n=1}^{M} C_{ijn} f_i(r) g_j(z) \cos n\varphi \qquad (69)$$

où les coefficients C_{ijn} restent à trouver. Compte tenu de (54a,b,c) les vitesses s'écrivent :

$$v_r = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} \sum_{n=1}^{M} C_{ijn} v_i(r) g'_j(z) \cos n\omega \qquad (70a)$$

$$v_\varphi = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} \sum_{n=1}^{M} C_{ijn} w_i(r) g'_j(z) n \sin n\omega \qquad (70b)$$

$$v_z = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} \sum_{n=1}^{M} C_{ijn} u_i(r) g_j(z) \cos n\omega \qquad (70c)$$

avec :

$$v_i(r) = f'_i(r) \tag{71a}$$

$$w_i(r) = \frac{f_i(r)}{r} \tag{71b}$$

$$u_i(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right) f_i(r) \tag{71c}$$

On peut par exemple choisir les fonctions $f_i(r)$ telles que :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right) f_i = -k_i^2 f_i \tag{72}$$

La relation (71) est vérifiée par les fonctions de Bessel, soit :

$$f_i(r) \equiv J_n(k_i r) \tag{73}$$

Mais une telle solution (73) ne peut pas satisfaire simultanément les deux conditions aux limites :

$$f_i(r) = f'_i(r) = 0 \quad \text{en} \quad r = 1 \tag{74}$$

qui traduisent le fait que les trois composantes de la vitesse (71a,b,c) s'annulent sur les parois latérales. Nous choisirons donc plutôt :

$$u_i(r) = \frac{J_n(k_i r)}{J_n(k_i)} - r^n \tag{75a}$$

$$v_i(r) = -\frac{1}{k_i J_n(k_i)}\left[J'_n(k_i r) - J'_n(k_i) r^{n+1}\right] \tag{75b}$$

$$w_i(r) = \frac{n}{k_i^2 J_n(k_i)}\left[\frac{1}{r} J_n(k_i r) - J_n(k_i) r^{n+1}\right] \tag{75c}$$

Jusqu'à présent nous n'avons pas eu besoin de préciser la valeur des coefficients k_i, mais en adoptant les expressions (75a,b,c) pour la dépendance radiale des composantes de la vitesse nous avons perdu la possibilité de vérifier, div $\vec{v} = 0$, quelque soit k_i. C'est précisément la condition d'incompressibilité qui va fixer la valeur des coefficients k_i par la relation transcendante :

$$k_i J''_n(k_i) = (n+1)J'_n(k_i) \qquad (76)$$

Les valeurs de k_i pour $i = 1,\ldots,5$ et $n = 0,1,2$ figurent dans la table 1 :

TABLE 1

n	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0	5.13562	8.41724	11.61894	14.79595	17.95982
1	2.8064	6.56331	9.87104	13.09525	16.28677
2	4.08631	7.90444	11.26257	14.51952	17.73375

Il nous reste maintenant à préciser la nature des fonctions $g_j(z)$. Dans la suite du calcul nous rencontrerons des intégrales qui font intervenir les quantités :

$$v_\alpha \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_\alpha$$

où l'indice α représente r, φ ou z. Ces intégrales se factorisent et l'intégration sur la variable z fait apparaître les quantités :

$$\int dz\, g \frac{d^2 g}{dz^2} \quad , \qquad \int dz\, g' \frac{d^2}{dz^2} g'$$

Après intégration par partie la seconde de ces intégrales se met sous la forme :

$$\int dz\, g \frac{d^4 g}{dz^4} \quad ,$$

ce qui a conduit un certain nombre d'auteurs [21],[42] à choisir des fonctions g(z) telles que :

$$\frac{d^4 g}{dz^4} = \mu^4 g \qquad (77)$$

dont les solutions s'écrivent :

$$g_j(z) = \frac{\text{sh } \mu_j z}{\text{sh } \mu_j} - \frac{\sin \mu_j z}{\sin \mu_j} \qquad (78)$$

avec :

$$\coth \mu_j - \cot g\ \mu_j = 0 \qquad (79)$$

Notre préférence s'est portée sur le choix suivant :

$$g_j = (\lambda^2 - z^2)^2 z^{j-1} \qquad j = 1,\ldots,L \qquad (80)$$

Les intégrales mentionnées ci-dessus s'expriment alors très simplement en terme d'intégrales Eulériennes :

$$\mathcal{E}(m,n) = \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^n z^m \, dz \qquad (81)$$

qui se calculent grâce à la relation de récurrence :

$$\mathcal{E}(m,n) = \frac{2n}{2n+1+m} \mathcal{E}(m,n-1) \qquad (82)$$

sachant que :

$$\mathcal{E}(m,0) = \begin{cases} 0 \text{ si m est impair} \\ \frac{2}{m+1} \text{ si m est pair} \end{cases}$$

6. Fonctions d'essai pour la température - premier exemple

Nous avons utilisé deux sortes de fonctions d'essai pour la température. Le choix que nous avons effectué en premier s'inspire du calcul de Gershuni et Zukhovitskii. Ces auteurs utilisent l'expression de la température obtenue en résolvant :

$$\Delta^2 = \gamma_2 \qquad (83)$$

où le second membre v_z est connu et de la forme :

$$v_z = \cos n\varphi \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} C_{ijn}\, u_i(r) g_j(z) \qquad (84)$$

On cherche alors des solutions de (83) de la forme :

$$\theta = \cos n\varphi \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} C_{ijn}\, \mathscr{C}_{ij}(r,z) \qquad (85)$$

L'équation (83) se transforme en une série d'équations :

$$\Delta \mathscr{C}_{ij} = u_i(r) g_j(z) \quad \begin{matrix} i = 1,\ldots K \\ j = 1,\ldots L \end{matrix} \qquad (86)$$

Ces équations ne sont pas solubles exactement et pour les résoudre nous avons adopté la méthode de Kantorovich préconisé par Gershuni et Zukhovitskii. Cette méthode a pour but de réduire la dimensionalité du problème et de remplacer les équations aux dérivées partielles par des équations différentielles ordinaires. Dans notre cas c'est la dépendance en z qui sera choisie arbitrairement et la méthode de Galerkin va nous permettre de trouver l'équation que satisfait la dépendance en r, qui elle sera résolue exactement. On cherche des solutions $\mathscr{C}_{ij}$ de la forme

$$\mathscr{C}_{ij} = \tau_{ij}(r)\Theta_j(z) \qquad (87)$$

où $\Theta_j(z)$ est un polynôme de degré égal à celui de $g_j(z)$ que l'on précisera ultérieurement.

Chacunes des équations (86) s'écrit alors :

$$\Theta_j\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)\tau_{ij} + \tau_{ij}\,\Theta_j'' = u_i(r) g_j(z) \qquad (88)$$

Multiplions les deux membres de (88) par Θ_j et intégrons sur la variable z. On obtient ainsi une équation pour la dépendance radiale $\tau_{ij}(r)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \alpha_j^2\right)\right]\tau_{ij} = \mathscr{P}_j\, u_i(r) \qquad (89)$$

avec :

$$\alpha_j^2 = \left(\int dz|\theta_j'|^2\right) / \int dz|\theta_j|^2 \quad ,$$

et :

$$\mathcal{P}_j = \left(\int dz\, g_j\theta_j\right) / \int dz|\theta_j|^2 \ .$$

L'équation (89) admet des solutions exactes de la forme :

$$\tau_{ij}(r) = \mathcal{P}_j\left[-\frac{1}{(k_i^2+\alpha_j^2)} \times \frac{J_n(k_i r)}{J_n(k_i)} + \frac{r^n}{\alpha_j^2} + \mathcal{E}\, I_n(\alpha_j r)\right] \qquad (90)$$

où $\mathcal{E}$ est une constante déterminée par les conditions aux limites : $\tau_{ij} = 0$ ou $\frac{d\tau_{ij}}{dr} = 0$ à $r = 1$, suivant la nature respectivement conductrice ou isolante des parois latérales.

Les résultats présentés au chapitre IV ont été obtenus avec l'expression (90) comme fonction d'essai pour la température. Une amélioration de la méthode de Kantorovich a été apportée par Kerr (1968). La méthode de Kerr[43] est un processus itératif qui tend à éliminer le caractère arbitraire lié au choix de la dépendance en z, dans notre cas $\theta_j(z)$, des fonctions d'essais (87). L'étape initiale de la méthode de Kerr aboutit à l'expression (90) pour la dépendance radiale de la température qui associée à une dépendance axiale, $\theta_j(z)$, choisie arbitrairement fournit l'expression de la température en première approximation. La seconde étape de la méthode de Kerr consiste à utiliser une nouvelle fonction d'essai pour la température composée de l'expression (90) pour la dépendance radiale et d'une fonction inconnue $\theta_j(z)$ pour la dépendance axiale. L'équation que satisfait θ_j est déterminée par la méthode de Galerkin et si possible résolue exactement. Ces deux étapes qui consistent à déterminer alternativement $\theta_j(z)$ et $\tau_{ij}(r)$ sont répétées autant de fois qu'il est nécessaire jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement entre deux itérations successives.

Lorsque nous sommes capables de lever l'arbitraire attaché au choix initial de $\theta_j(z)$, on peut se dispenser d'avoir recours à la méthode de Kerr qui mène à des calculs assez longs au bout de quelques itérations. Dans la suite du calcul nous utiliserons seulement la méthode de Kantorovich et nous justifierons le choix de $\theta_j(z)$ en nous assurant sur un exemple

simple que ce choix permet de retrouver des résultats déjà connus exactement. L'exemple auquel on se réferrera pour tester nos calculs est celui des liquides ordinaires dans la limite du cylindre infini pour lequel Ostroumov a donné une résolution analytique. Toutefois on notera que la méthode de Kantorovich comporte une difficulté qui réside dans le choix des fonctions $\Theta_j(z)$ ce qui la rend délicate à mettre en oeuvre aux ordres élevés de la méthode de Galerkin ($j > 2$) ou lorsque les vitesses sont décrites par la superposition d'un nombre important de modes radiaux ($i > 1$) ce qui est le cas dans la limite des petits rapports d'aspect.

Examinons l'ordre le plus bas de l'approximation de Galerkin, $j = 1$, où un candidat possible pour Θ_j s'écrira :

$$\Theta_1 = (\lambda^2 - z^2)(\lambda^2 + az^2) \tag{91}$$

a étant un paramètre ajustable que Gershuni et Zukhovitskii fixent par la relation supplémentaire :

$$\frac{d^2\Theta_j}{dz^2} = 0 \quad \text{à} \quad z = \pm\lambda \tag{92}$$

Cette condition traduit le fait que l'équation (88) est vérifiée exactement en au moins deux points du domaine, à savoir $z = \pm\lambda$. On trouve ainsi que a vaut -1/5. A cet ordre de l'approximation de Galerkin les nombres de Rayleigh critiques pour l'eau et les liquides ordinaires sont confondus. En effet les fonctions d'essai pour la vitesse (80) et la température (91) sont des fonctions paires de la variable z et donc le terme $\langle z\, v_z \theta \rangle$ est nul. Les résultats obtenus sont présentés dans la première colonne de la Table 2 pour les modes angulaires $n = 0, 1$ et 2 et des parois latérales conductrices. Ces résultats se trouvent sous forme de courbes dans le livre de Gershuni et Zukhovitskii. C'est à l'ordre suivant que la distinction entre profil linéaire de densité et profil parabolique, va apparaître. Au second ordre la condition (92) suffit encore à déterminer de façon unique Θ_j soit :

$$\Theta_2 = (\lambda^2 - z^2)\left(\lambda^2 - \frac{3}{7} z^2\right)z \tag{93}$$

Dans le cas des liquides ordinaires les solutions de (13a,b) se divisent en deux classes suivant leur parité par rapport à la mi-hauteur de la cellule

et par conséquent la deuxième approximation de Galerkin faisant intervenir l'expression (93) dans le développement de la température ne constitue en réalité que la première approximation du nombre de Rayleigh critique des modes verticaux impairs. Les résultats figurent dans la deuxième colonne des tableaux (2a,b,c). Pour l'eau, les nombres de Rayleigh critiques dans cette approximation, ont été portés dans la première colonne des tables (3a,b,c). On constate que dans la limite $\lambda \to \infty$ ces nombres sont très inférieurs aux nombres de Rayleigh critiques des liquides ordinaires. De plus si l'on trace le profil vertical de la composante v_z de la vitesse, on trouve qu'à partir d'une certaine valeur du rapport d'aspect λ, comprise entre 1.5 et 2 suivant le mode angulaire considéré, il existe un plan horizontal de cote z_o positive pour lequel cette vitesse s'annule. Au-dessus de ce plan l'amplitude de la vitesse est faible. L'écoulement convectif se compose donc de deux cellules convectives verticales d'inégale importance, la cellule principale située dans la région $-\lambda < z < z_o$ et une cellule secondaire dans la partie supérieure du cylindre $z_o < z < \lambda$. Pour $\lambda = 10$, la valeur de z_o est approximativement $\frac{\lambda}{4}$ et n'évolue pratiquement plus lorsqu'on augmente λ.

Voyons maintenant si les résultats concernant l'abaissement du nombre de Rayleigh critique et la structure convective verticale se confirment aux approximations suivantes où l'on tiendra compte de :

$$\Theta_i = (1-z^2)\times \begin{cases} \sum_{k=1}^{i} a_{ik}\, z^{2(k-1)} & , \quad i \text{ impair} \\ \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}\, z^{2k-1} & , \quad i \text{ pair} \end{cases} \qquad (94)$$

où les coefficients a_{ik} sont des paramètres ajustables.
Les fonctions $\Theta_i(z)$ étant déterminées à un facteur multiplicatif près, on choisira toujours :

$$a_{i1} = 1$$

On peut encore se servir de la condition (92) pour éliminer un autre coefficient. Si l'on s'arrête à la sixième approximation de Galerkin on obtient ainsi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_{32} &= -(1+9a_{33})/5 \\ a_{42} &= -(3+11a_{43})/7 \\ a_{52} &= -(1+9a_{53}+13a_{54})/5 \\ a_{62} &= -(3+11a_{63}+15a_{64})/7 \end{aligned} \qquad (95)$$

Nous allons exposer maintenant la manière dont on fixe à chaque approximation la valeur des coefficients inconnus a_{33}, a_{43} et les couples de coefficients (a_{53}, a_{54}) et (a_{63}, a_{64}). Le principe consiste à regarder la variation du nombre de Rayleigh en fonction du ou des coefficients inconnus a_{ik} et à retenir la valeur de ces coefficients qui fournit le meilleur résultat. Nous avons d'abord appliqué ce critère de sélection des coefficients a_{ik} sur un exemple : celui des liquides ordinaires. Dans ce cas nous connaissons un résultat exact dans la limite des grands rapports d'aspect, c'est le résultat d'Ostroumov. Nous allons donc pouvoir ajuster les coefficients a_{ik} de manière à retrouver ce résultat. Pour les modes angulaires considérés, $n = 0$, 1 et 2 et dans le cas de parois latérales conductrices, la méthode de Galerkin fournit en première approximation une expression analytique pour le nombre de Rayleigh critique qui admet le développement suivant dans la limite $\lambda \to \infty$:

$$Ra^{(n)} = Ra^{(n,\infty)}\left(1 + \frac{C^{(n)}}{\lambda^2}\right) \qquad (96)$$

avec :

$$Ra^{(0,\infty)} = 475,\ Ra^{(1,\infty)} = 228,\ Ra^{(2,\infty)} = 740,$$

et :

$$C^{(0)} = 0.55,\ C^{(1)} = 0.69,\ C^{(2)} = 0.38$$

En pratique la limite $Ra^{(n,\infty)}$ est atteinte pour $\lambda = 10$. En comparant ces résultats aux valeurs exactes trouvées par Ostroumov, soit respectivement :

$$Ra^{(0,\infty)} = 452,\ Ra^{(1,\infty)} = 216,\ Ra^{(2,\infty)} = 695,$$

on constate que l'erreur commise sur le nombre de Rayleigh critique n'excède pas 7%. On peut encore améliorer ces résultats en considérant les approximations d'ordre plus élevé de la méthode de Galerkin. Pour les modes pairs, l'approximation suivante est la troisième qui fait intervenir le coefficient inconnu a_{33}. La valeur de ce coefficient a_{33} entre explicitement dans les expressions de α_3^2 et $\mathcal{P}_3$, soit :

$$\alpha_3^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{281}{11}\,a_{33}^2 - 22a_{33} + 51\right)\Big/\left(\frac{413}{143}\,a_{33}^2 - \frac{71}{99}\,a_{33} + \frac{31}{9}\right) \qquad (97a)$$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{5}{66}\left(\frac{13}{3} - \frac{23}{13}\,a_{33}\right)\Big/\left(\frac{413}{143}\,a_{33}^2 - \frac{71}{99}\,a_{33} + \frac{31}{9}\right) \qquad (97b)$$

Les variations de $12\,\alpha_3^2$ et $\frac{66}{5}\,\mathcal{P}_3$ en fonction de a_{33} sont portées sur les Fig. 2a,b qui montrent d'importantes variations se situant pour des valeurs de a_{33} allant de -10 à +10. Dans la limite $a_{33} \to \pm\infty$, α_3^2 tend vers une valeur asymptotique tandis que $\mathcal{P}_3$ tend vers zéro. Nous avons regardé la variation du nombre de Rayleigh critique qui résulte de la variation de a_{33} sur le domaine $-20 < a_{33} < 20$. Les résultats sont portés sur la Fig. 3 pour différentes valeurs du rapport d'aspect λ. A cet ordre d'approximation de la méthode de Galerkin on peut encore trouver le nombre de Rayleigh critique analytiquement. Le déterminant à annuler étant :

$$\begin{vmatrix} RaP_{11} + Q_{11} & RaP_{13} + Q_{13} \\ RaP_{31} + Q_{31} & RaP_{33} + Q_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (98)$$

Le nombre de Rayleigh se trouve être la plus petite racine positive d'un polynôme du second degré. Il est théoriquement possible d'obtenir une expression analytique de la valeur asymptotique $Ra^{(n,\infty)}$ qui n'est plus une constante comme dans l'expression (96) mais dépend cette fois de a_{33}. On pourrait donc trouver exactement la ou les valeurs de a_{33} telle que la valeur de $Ra^{(n,\infty)}$ soit égale à la limite d'Ostroumov ce qui rendrait la méthode aussi précise que possible dans la limite $\lambda \to \infty$. Néanmoins les expressions de P_{ij} et Q_{ij} $(i,j = 1 \text{ et } 3)$ étant des fonctions compliquées de a_{33} nous avons été contraints de résoudre (98) numériquement et en pratique le choix du paramètre a_{33} ressort de l'examen de la Fig. 3. On remarque d'abord que pour $a_{33} > 2$ il n'existe pas de racines réelles pour toutes les valeurs de λ. Cela coïncide avec la valeur de a_{33} pour laquelle $\mathcal{P}_3$ devient négatif. On constate par ailleurs qu'il existe pour chaque valeur de λ des variations du nombre de Rayleigh critique en fonction de a_{33} qui atteignent 12% de sa valeur minimale. Cela montre qu'il faut choisir a_{33} judicieusement si l'on veut améliorer la précision de l'approximation précédente. Pour le mode axisymétrique et $\lambda = 10$, il existe deux valeurs de a_{33} pour lesquelles on obtient un nombre de Rayleigh critique voisin de la limite d'Ostroumov, ce sont $a_{33} = -8$ et $a_{33} = -2$. Nous avons tracé sur la Fig. 4a les profils verticaux de la température $\Theta_3(z)$ correspondant à ces deux valeurs ainsi qu'à $a_{33} = 0$. Lorsque $a_{33} = 0$, Θ_3 est proportionnelle à Θ_1 et on est ramené à l'approximation précédente. A la valeur, $a_{33} = -2$, correspond un profil de température $\Theta_3(z)$ qui est plat sur la plus grande partie du domaine, $-\lambda < z < \lambda$, avec de forts gradients concentrés près des bords, $z = \pm\lambda$. Sachant que la vitesse

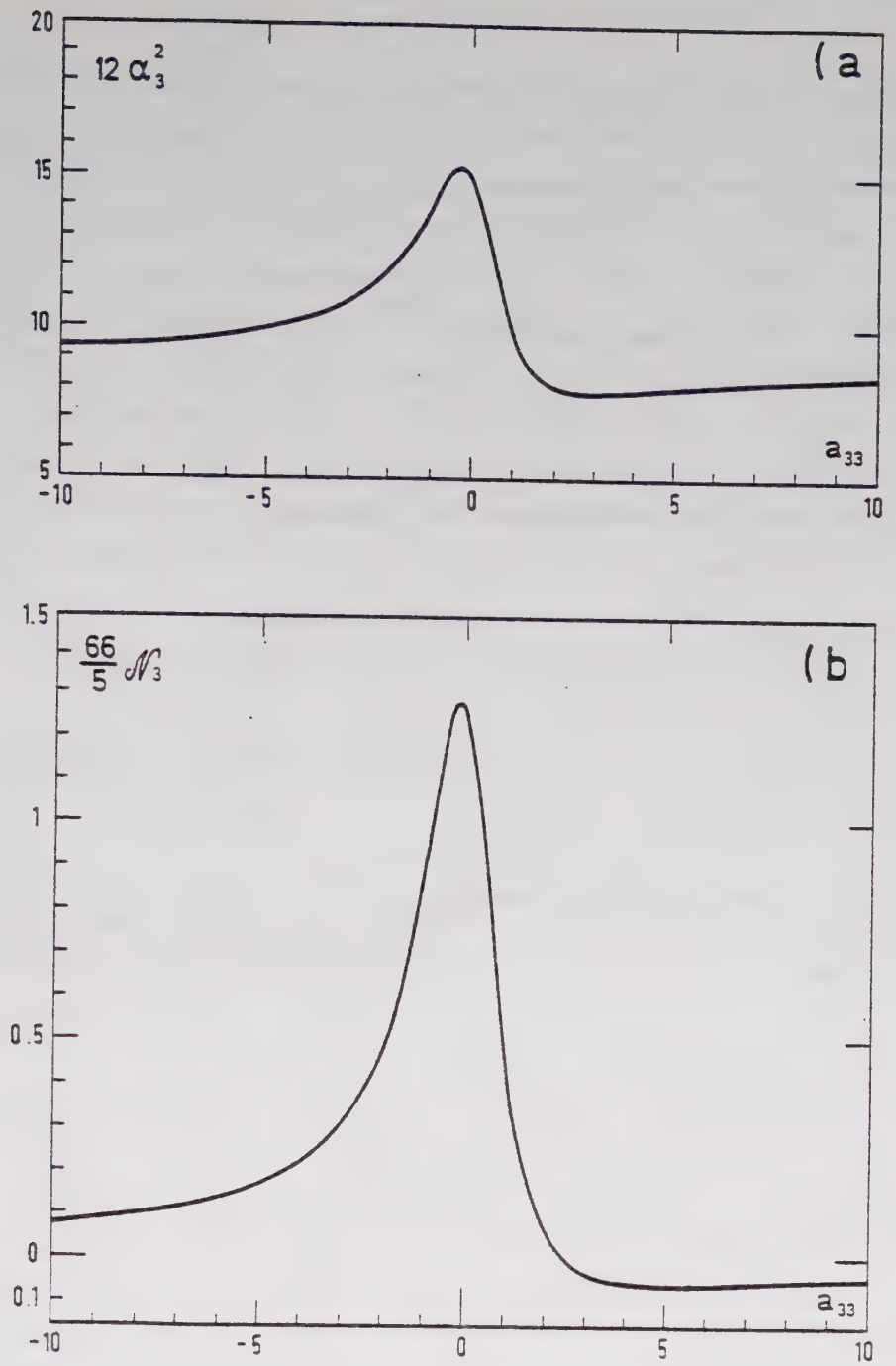


Figure 2

Variations des coefficients $12\,\alpha_3^2$ (courbe a) et $\mathcal{N}_3$ (courbe b) en fonction du paramètre ajustable a_{33} qui intervient à la troisième approximation de la méthode de Galerkin. A cet ordre, la dépendance radiale de la fonction d'essai pour la température s'écrit :

$$\tau_{i3} = 3\left[-\frac{1}{k_i^2 + \alpha_3^2} \times \frac{J_n(k_i r)}{J_n(k_i)} + \frac{r^n}{\alpha_3^2} + \mathcal{E}\, I_n(\alpha_3 r)\right]$$

où k_i est le nombre d'onde radial et $\mathcal{E}$ une constante qui dépend des conditions aux limites.

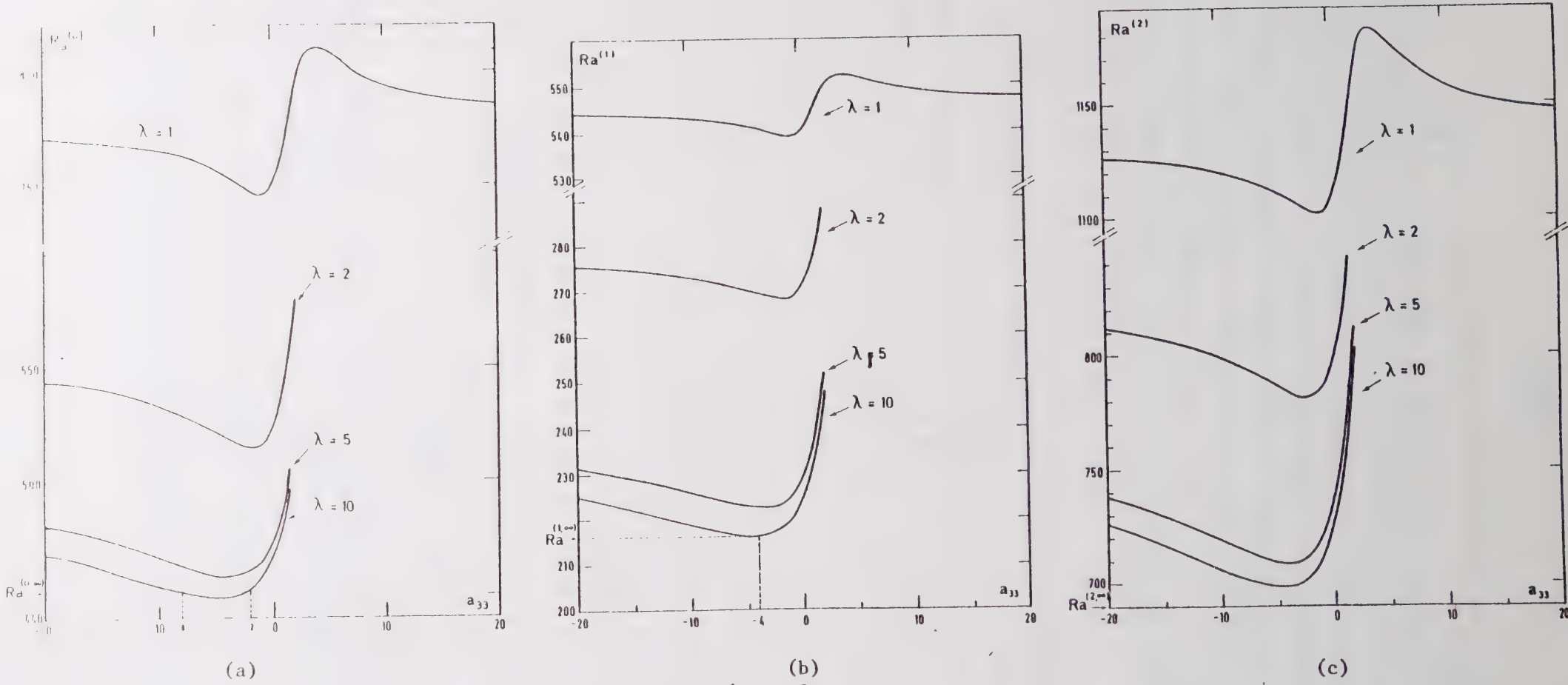


Figure 3

Variations du nombre de Rayleigh critique $Ra^{(n)}$ du mode angulaire n, pour différentes valeurs du rapport d'aspect λ, en fonction du paramètre ajustable a_{33} qui intervient à la troisième approximation de la méthode de Galerkin.
(a) n = 0, (b) n = 1, (c) n = 2.

et la température sont des fonctions indépendantes de la coordonnée verticale z lorsque la longueur du cylindre est infinie, on comprend alors pourquoi la valeur, $a_{33} = -2$, permet de retrouver un nombre de Rayleigh critique proche de la limite d'Ostroumov dans le cas d'un cylindre de longueur grande mais finie. On peut s'étonner de retrouver le même nombre de Rayleigh avec la valeur, $a_{33} = -8$, pour laquelle le profil de température $\Theta_3(z)$ a une allure très différente avec entre autre un maximum autour de $z = \pm 0.6$. L'explication tient cette fois à la forme asymptotique de l'équation (88) lorsque λ tend vers l'infini. Dans cette limite le terme en $\frac{d^2\Theta_j}{dz^2}$ qui est d'ordre λ^{-2} est négligeable devant les deux autres termes et l'équation (88) se réduit à :

$$\Theta_j\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)\tau_{ij} = u_i(r)g_j(z) \qquad (99)$$

dont la solution consiste à prendre :

$$\Theta_j(z) = g_j(z) \qquad (100)$$

Comme on peut le voir en comparant les figures (4a,b), c'est lorsque $a_{33} = -8$ que le profil de température $\Theta_3(z)$ possède le plus de points communs avec $g_3(z)$.

Dans le cas de l'eau où, à cause de la présence du terme en $\frac{z}{\lambda}$ dans l'équation (41a), il n'y a aucune raison de penser que la vitesse et la température sont des fonctions indépendantes de z dans la limite $\lambda \to \infty$, nous calculerons le nombre de Rayleigh critique du mode axisymétrique en prenant $a_{33} = -8$. Il est bien évident que ce choix de valeur pour a_{33} ne va pas nécessairement conduire à de bons résultats sur toute la gamme de rapports d'aspect considérés. En particulier dans la limite des petits rapports d'aspect où l'équation (88) prend la forme asymptotique :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - a_o^2\right)\mathcal{C}_{ij} = u_i(r)g_j(z) \quad , \qquad (101)$$

a_o étant le nombre d'onde en géométrie infinie, le raisonnement que nous venons de faire et qui s'appuie sur la forme particulière de l'équation (99) ne tient plus. Ainsi le nombre de Rayleigh critique du mode axisymétrique pour le plus petit rapport d'aspect considéré, $\lambda = 1$, et $a_{33} = -8$ vaut $Ra^{(0)} = 763$, valeur qui s'écarte beaucoup du résultat obtenu par Charlson et Sani,

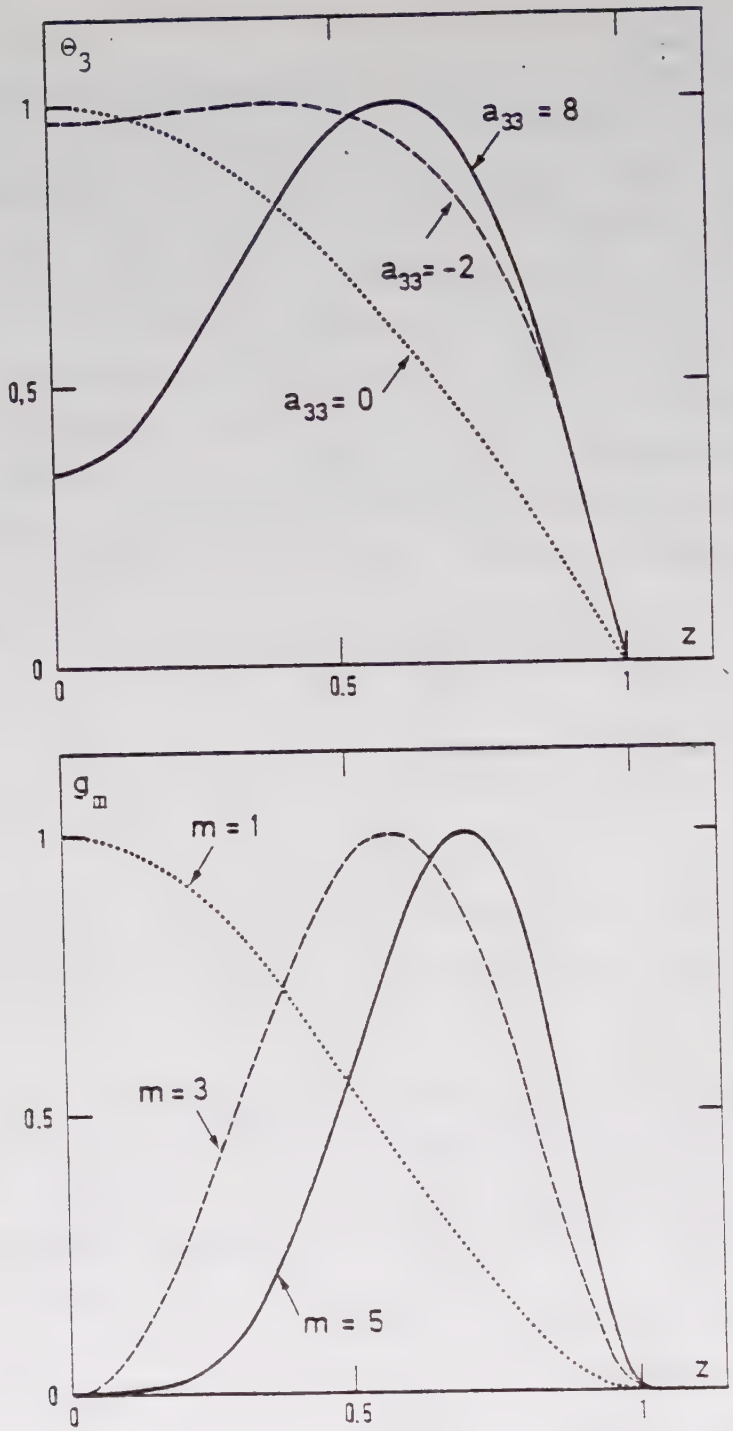


Figure 4

a) Profil vertical de la fonction d'essai pour la température, au troisième ordre d'approximation de la méthode de Galerkin : $\Theta_3(z) = (1-z^2)(1+a_{32}z^2+a_{33}z^4)$, pour différentes valeurs du paramètre a_{33} ; Θ_3 étant normalisée à l'unité et $a_{32} = -(1+9a_{33}/5)$.

b) Comparaison avec la dépendance verticale, $g_m(z) = (\lambda^2-z^2)^2 z^{m-1}$, de la fonction d'essai pour la vitesse aux ordres d'approximations impairs, m = 1,3,5, de la méthode de Galerkin

$Ra^{(0)} = 733$, pour la même valeur de λ mais des fonctions d'essai différentes. Pour $\lambda = 1$, l'examen de la Fig. 3a montre que c'est la valeur $a_{33} = -1$ qui fournit le nombre de Rayleigh critique, 745, le plus proche de la valeur de référence calculée par Charlson et Sani.

Nous venons d'illustrer par le calcul du nombre de Rayleigh critique des liquides ordinaires, pour le mode angulaire n = 0 et le mode vertical pair, la manière dont on fixe le coefficient arbitraire a_{33} qui apparaît dans l'expression de la température à la troisième approximation de la méthode de Galerkin. Nos valeurs de référence étant le nombre de Rayleigh critique trouvé par Ostroumov dans la limite $\lambda \to \infty$ (en pratique $\lambda = 10$) et le résultat de Charlson et Sani pour $\lambda = 1$, nous retrouvons ces deux valeurs limites à condition de fixer a_{33} de la façon suivante :

$$a_{33} = -8 \qquad \lambda \lesssim 10$$

$$a_{33} = -1 \qquad \lambda \simeq 1$$

Lorsqu'on s'intéresse aux autres modes angulaires, n = 1 et 2, ce sont d'autres valeurs du coefficient a_{33} qui permettent de retrouver les nombres de Rayleigh critiques pris comme références (Fig. 3b,c). Ainsi le choix du coefficient a_{33} dépend à la fois du rapport d'aspect λ et du mode angulaire n considérés. On entrevoit donc la difficulté qu'il y a à fixer les coefficients arbitraires a_{ik} aux ordres d'approximation plus élevés ($i > 3$). A l'ordre suivant, le quatrième, il n'y a encore qu'un seul coefficient, a_{43}, à déterminer. Dans le cas des liquides ordinaires cette approximation ne concerne que les modes verticaux impairs. Dans ce cas le seul résultat connu sur lequel on peut s'appuyer, est fourni par la limite du cylindre de hauteur infinie. Dans cette limite la distinction entre modes pairs et impairs disparaît puisque $\vec{u}$ et θ sont indépendants de z et on doit retrouver le résultat d'Ostroumov. Les variations du nombre de Rayleigh critique en fonction de a_{43} sont représentées sur la Fig. 5 pour différentes valeurs du rapport d'aspect λ. Pour le mode axisymétrique et $\lambda = 10$, c'est avec la valeur, $a_{43} = -2$, que l'on trouve le nombre de Rayleigh critique qui s'approche le plus du résultat d'Ostroumov. On peut voir sur la Fig. 6 les profils verticaux de température correspondant aux approximations paires, $j = 2,4,6$ et donc aux modes impairs en z comparés aux variations de $g_j(z)$. Notons que dans le cas des modes impairs satisfaisant la condition (92),

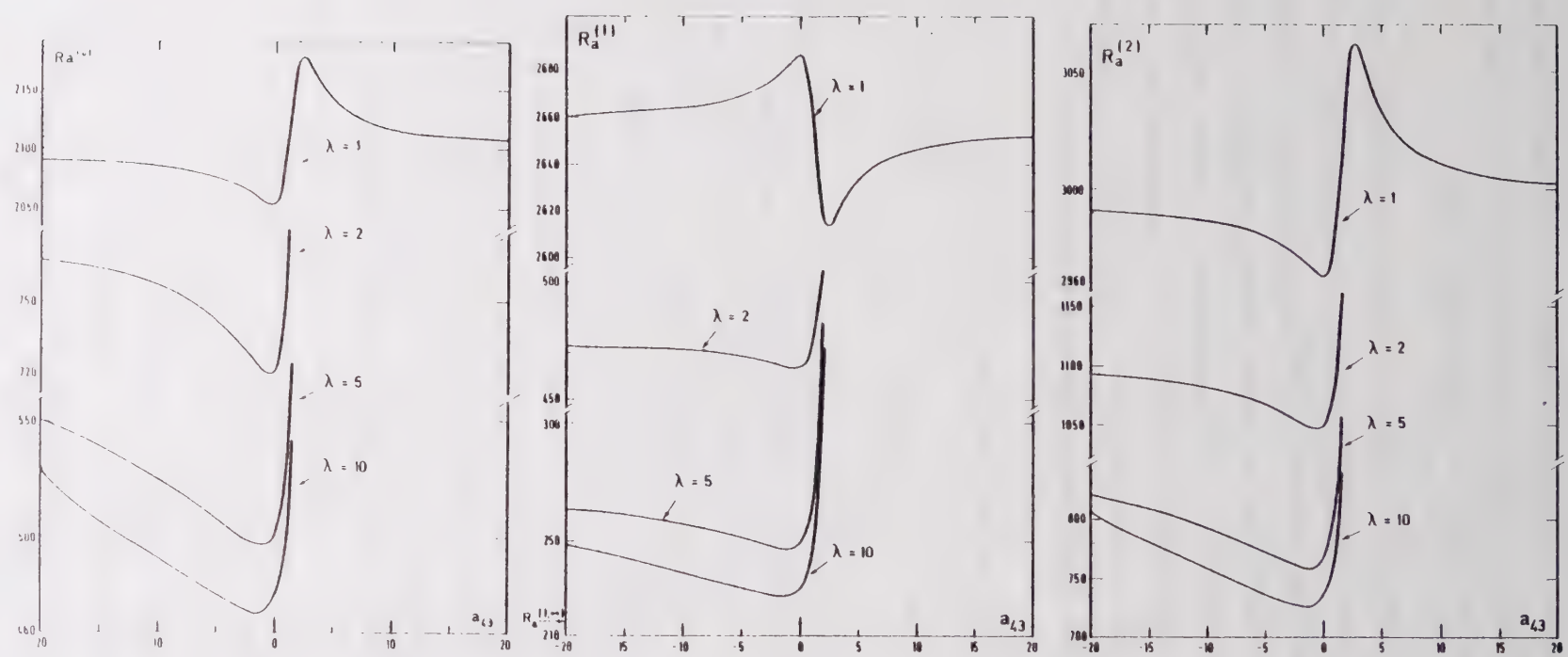


Figure 5

Variations du nombre de Rayleigh critique $Ra^{(n)}$ du mode angulaire n, pour différentes valeurs du rapport d'aspect λ, en fonction du paramètre ajustable a_{43} qui intervient à la quatrième approximation de la méthode de Galerkin.
a) n = 0, b) n = 1, c) n = 2.

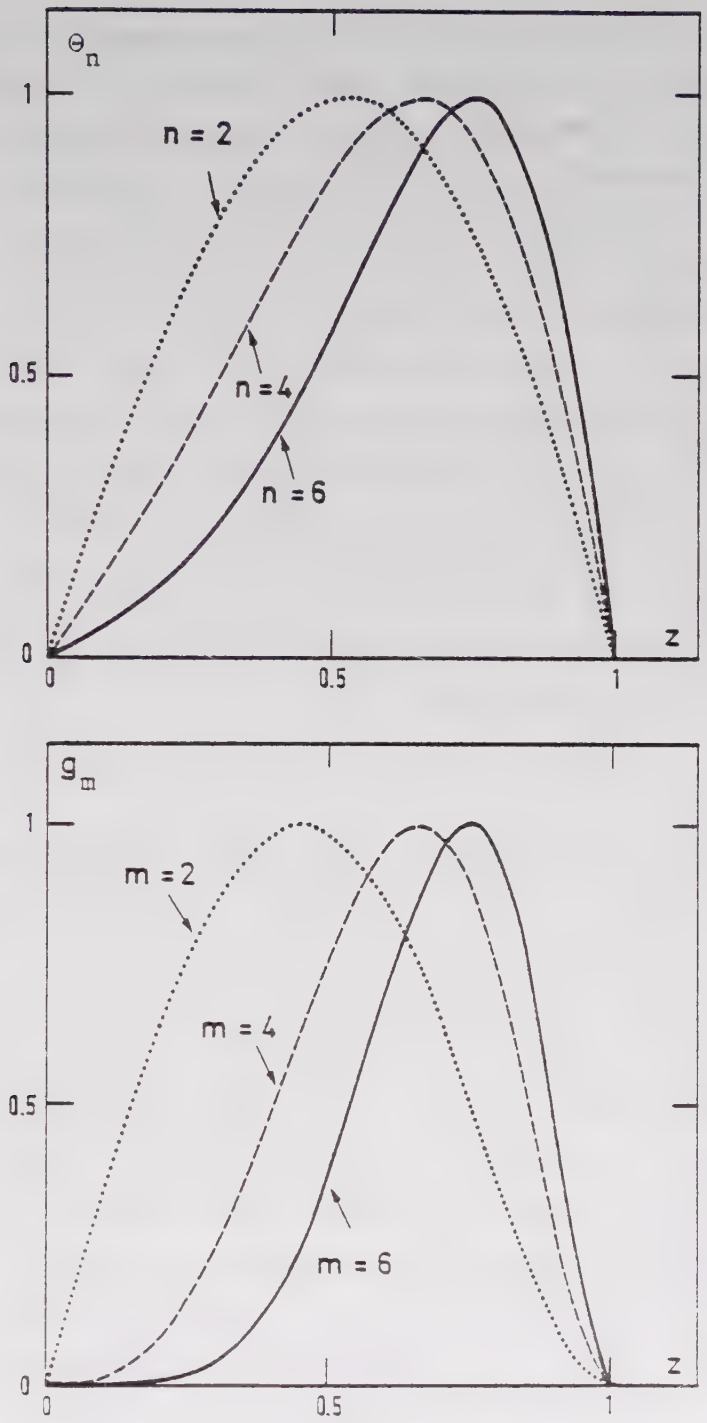


Figure 6

a) Profil vertical des fonctions d'essai pour la température, Θ_n, normalisées à l'unité, correspondant aux approximations paires, n = 2,4,6, de la méthode de Galerkin.
b) Comparaison avec la dépendance verticale, $g_m(z) = (\lambda^2 - z^2)^2 z^{m-1}$, de la fonction d'essai pour la vitesse aux mêmes ordres d'approximation .

l'équation (88) est toujours vérifiée en trois points, soit $z = 0$ et $z = \pm\lambda$.

Nous avons encore regardé l'effet des deux approximations suivantes qui font intervenir dans le développement de la température les expressions Θ_5 et Θ_6. A chacune de ces approximations nous avons un couple de coefficients, respectivement (a_{53},a_{54}) et (a_{63},a_{64}), à déterminer. En regardant la variation du nombre de Rayleigh critique qui résulte d'une variation de ces coefficients, on constate qu'il existe plusieurs couples de coefficients qui conduisent à des nombres de Rayleigh critiques pour $\lambda = 10$, compatibles avec le résultat d'Ostroumov. A l'ordre cinq, qui concerne uniquement les modes verticaux pairs, nous avons sélectionné deux couples représentatifs pour lesquels nous avons tracé les profils de température $\Theta_5(z)$ correspondants. Sur la figure 7 la courbe (a) est l'exemple typique du profil de température avec lequel on s'attend à trouver de bons résultats dans le cas des liquides ordinaires et la limite $\lambda \to \infty$. L'autre exemple permet quant à lui de vérifier pour un certain nombre de points de coordonnée z, la relation :

$$\Theta_5(z) = g_5(z) \quad ,$$

dont on a déjà souligné l'importance lors de la résolution de l'équation (99) et c'est avec cette dernière fonction d'essai que sera calculée le nombre de Rayleigh critique de l'eau.

Dans la limite des petits rapports d'aspect $\lambda > 1$, une fois fixés les coefficients a_{33} ou a_{43}, le nombre de Rayleigh critique est peu sensible à des variations des coefficients a_{ik}, avec $i > 4$. Les nombres de Rayleigh critiques des modes pairs et impairs des liquides ordinaires dans les six premières approximations de la méthode de Galerkin figurent dans la Table 2. Les nombres de Rayleigh critiques d'un cylindre d'eau de rapport d'aspect λ correspondant aux approximations $i = 2,\ldots,6$ de la méthode de Galerkin se trouve dans les Tables (3a,b,c). On constate que la convergence vers le résultat final est d'autant plus rapide que le rapport d'aspect λ est petit. Pour $\lambda = 10$, le nombre de Rayleigh critique évolue encore de près de 3% entre la cinquième et la sixième approximation. Dans le cas de l'eau le tracé du profil vertical de la vitesse v_z (Fig. 8) confirme l'apparition d'une seconde cellule verticale faiblement convective lorsque λ augmente.

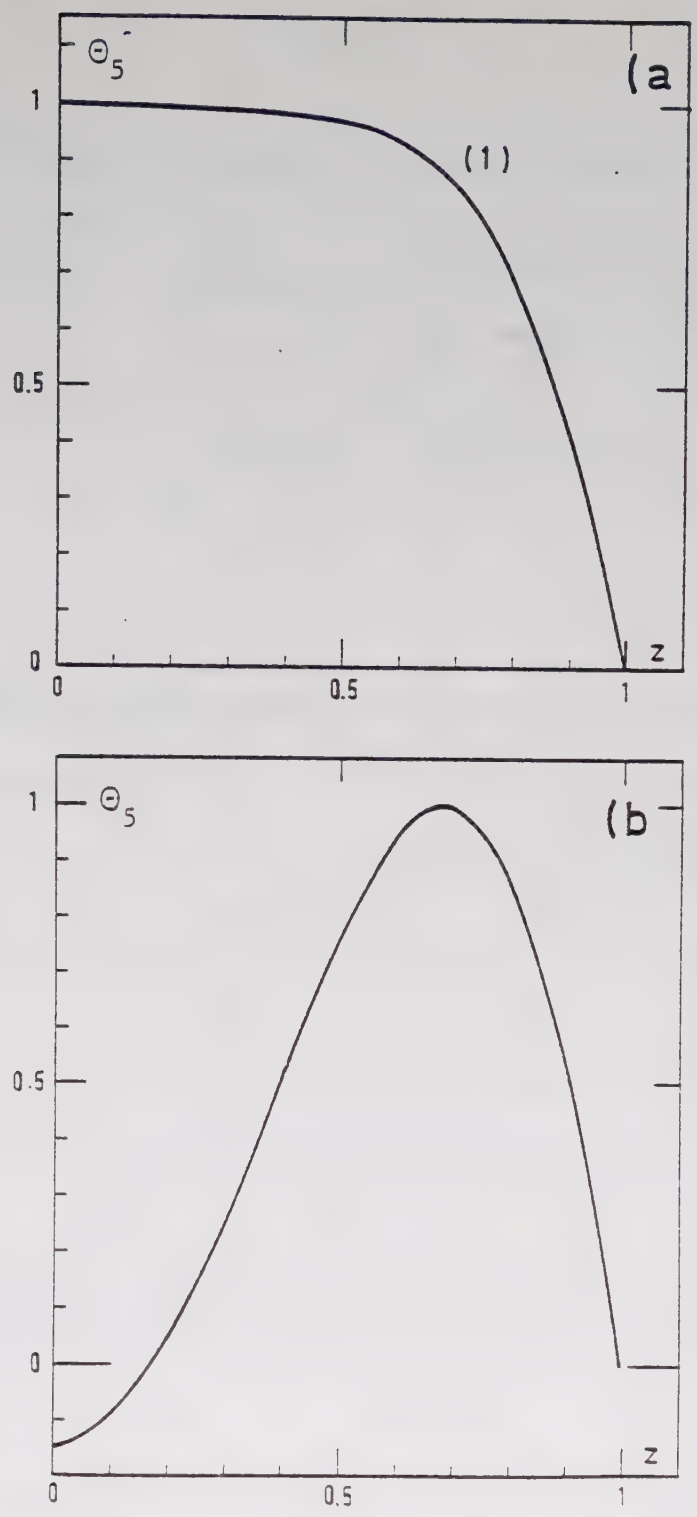


Figure 7

Profil vertical de deux fonctions d'essai pour la température au cinquième ordre d'approximation de la méthode de Galerkin, avec lesquelles on retrouve le résultat d'Ostroumov pour le nombre de Rayleigh critique des liquides ordinaires dans la limite $\lambda \to \infty$.

$$\Theta_5 = (1-z^2)(1 + a_{52}z^2 + a_{53}z^4 + a_{54}z^6)$$

avec $a_{52} = -(1+9a_{53} + 13a_{54})/5$

a) $a_{53} = 2.4$, $a_{54} = -2$; b) $a_{53} = 4$, $a_{54} = 10$

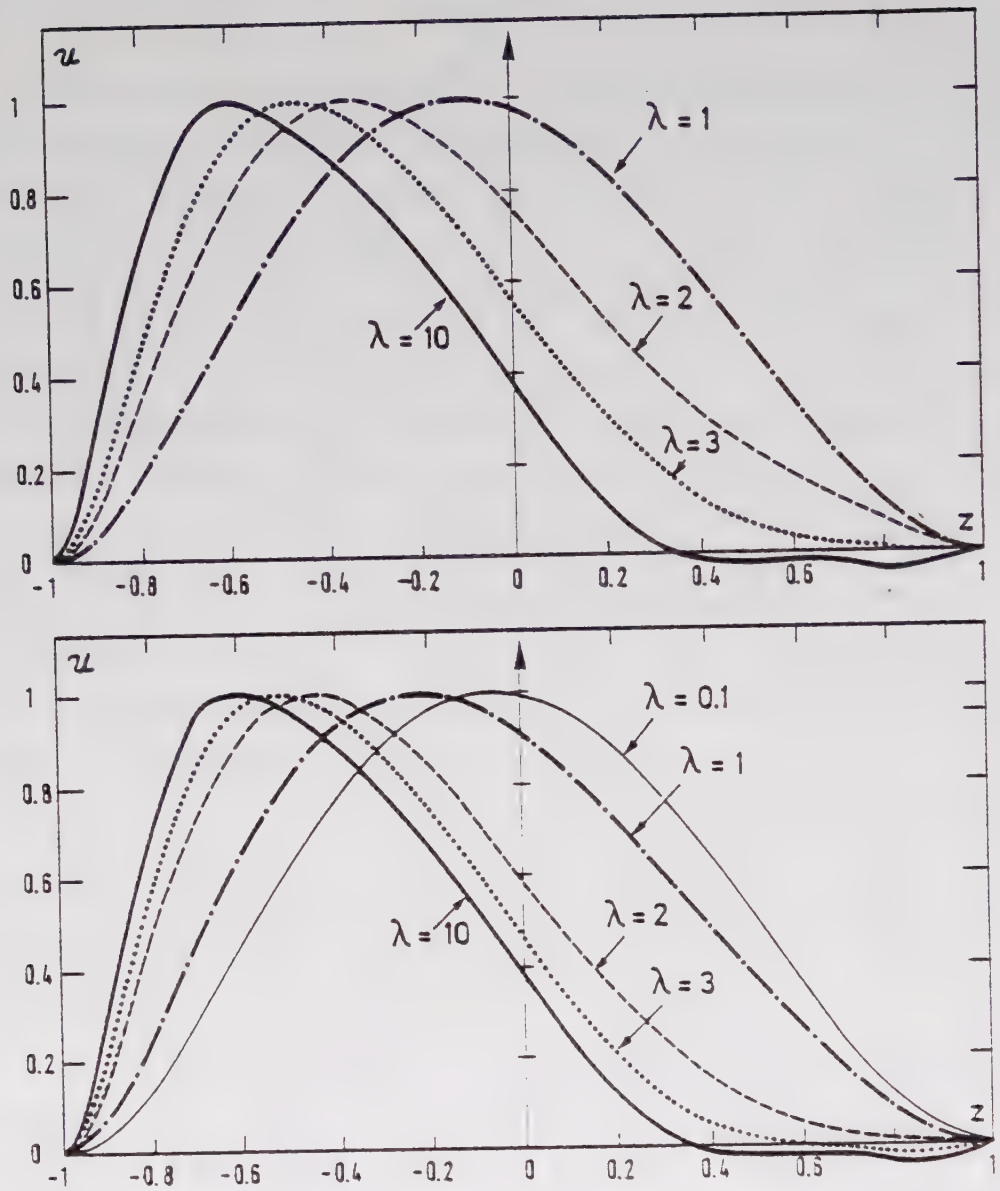


FIGURE 8

Profil de la composante verticale de la vitesse suivant la hauteur du cylindre, pour différentes valeurs du rapport d'aspect λ.

a) n = 1, b) n = 2.

Les profils correspondant au mode n = 0 étant pratiquement identiques à ceux du mode n = 2, n'ont pas été représentés ici.

Table 2

(a)

λ \ i	1	2	3	4	5	6
1	762.1		748.1		745.1	
		2061.7		2063.2		2062.7
2	536.4		515.7		513.9	
		740.4		276.3		722.8
5	484.6		460.5		459.2	
		518.4		497.7		484.3
10	477.6		452. 9		452.	
		490.5		468.8		452.4

(b)

λ \ i	1	2	3	4	5	6
1	542.4		539.4		538.9	
		2689.7		2677.3		2676.4
2	276.3		268.5		268.3	
		467.1		464.8		464.2
5	234.6		222.4		221.9	
		256.9		247.5		243.3
10	229.7		216.3		216.	
		237.2		226.7		218.5

(c)

λ \ i	1	2	3	4	5	6
1	1124.1		1102.9		1101.3	
		2968.8		2970.6		2968.7
2	815.7		782.5		781.0	
		1074.5		1052.2		1045.
5	751.5		709.3		705.8	
		793.4		760.1		738.2
10	743.0		698.9		695.7	
		760.4		726.2		696.8

Nombres de Rayleigh critiques des liquides ordinaires dans les six premières approximations de la méthode de Galerkin (indicées par i) pour des rapports d'aspect λ variant de 1 à 10. Les parois latérales étant conductrices.
a) n = 0, b) n = 1, c) n = 2.

Table 3

(a)

λ \ i	2	3	4	5	6
1	720.5	701.7	701.3	701.1	—
2	457.2	428.6	427.4	423.3	—
5	376.8	337.8	325	315.5	309.7
10	364.4	322.5	307.9	297.5	288.8

(b)

λ \ i	2	3	4	5	6
1	528.5	524.7	524.4	524.7	—
2	246.6	236.6	237.0	236.6	—
5	184.3	166.3	161	157.4	155.7
10	175.7	155.8	148.9	144.1	140.2

(c)

λ \ i	2	3	4	5	6
1	1060.7	1035.7	1035.5	1035	—
2	685.8	640	642.4	635.1	—
5	580.9	518.5	497.7	495.5	473.9
10	566	500.21	477.2	472.	447.2

Nombres de Rayleigh critiques d'un cylindre d'eau de rapport d'aspect λ dans les approximations i = 2,...,6. de la méthode de Galerkin. Les résultats de la première approximation (i = 1) sont identiques à ceux de la Table 2 et n'ont pas été reportés ici. Les parois latérales sont conductrices.

— *Signifie que le nombre de Rayleiah critique n'a pas changé de plus de 1% par rapport à l'approximation précédente.*

a) n = 0, b) n = 1, c) n = 2.

Ce dernier résultat est à rapprocher de deux autres résultats semblables obtenus dans des domaines différents. Nous avons déjà mentionné (§ III.3) la similitude qui existe entre les équations de notre problème (41a,b) et celles qui régissent la convection pénétrante ou l'instabilité de Taylor-Couette. Pour le problème stationnaire, elles sont de la forme générale :

$$\Delta^2 u = (1 - \xi z)v \qquad (102a)$$

$$\Delta v = N \Delta_2 u \qquad (102b)$$

Les fonctions u et v et les paramètres N et ξ doivent être interprétés différemment suivant les situations. N représente le nombre de Rayleigh ou le nombre de Taylor. Dans notre situation ξ est l'inverse du rapport d'aspect du cylindre, dans le problème de la convection pénétrante c'est le rapport de la hauteur totale de fluide à la hauteur effectivement instable. Dans l'instabilité de Taylor-Couette, $\xi = 1-\mu$, où μ est le rapport des vitesses de rotation angulaires des cylindres coaxiaux. Dans ces trois situations différentes et pour certaines valeurs du paramètre ξ il existe un plan nodal, $z = z_o$. Dans le problème de convection pénétrante c'est lorsque ξ augmente qu'il apparait une seconde cellule convective verticale (Fig. 9). Dans l'instabilité de Taylor-Couette, lorsque les cylindres tournent en sens opposé ($\mu < 0$) il existe un plan, $z = z_o$, où la vitesse angulaire est nulle. L'instabilité se trouve limitée à la région comprise entre ce plan et le cylindre intérieur et la distance z_o diminue lorsque ξ augmente (Fig. 10). Notre problème se distingue des deux autres par l'absence d'écoulement périodique suivant une direction d'espace. Les résultats obtenus lorsque la simplification :

$$\Delta = \frac{d^2}{dz^2} - a^2$$

(a étant le nombre d'onde de la structure périodique) est possible, ne se transposent donc pas directement dans notre cas.

Nous avons vu qu'en arrêtant le calcul du nombre de Rayleigh critique des liquides ordinaires au sixième ordre d'approximation de la méthode de Galerkin, on pouvait retrouver le résultat de Charlson et Sani lorsque $\lambda = 1$ à moins de 2% près et que les résultats, de Gershuni et Zukhovitskii

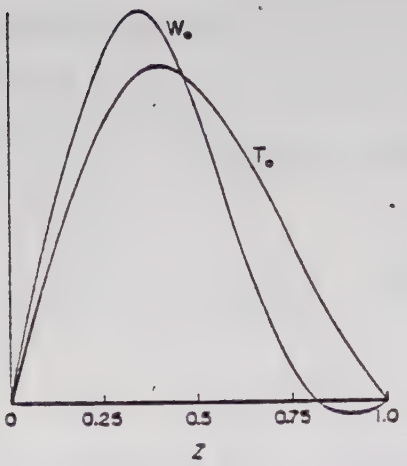


Figure 9

Composante verticale de la vitesse W_o en fonction de z pour $\xi = 2$ dans le problème de convection pénétrante. La température T_o normalisée à l'unité est aussi représentée. D'après un résultat de Veronis[38].

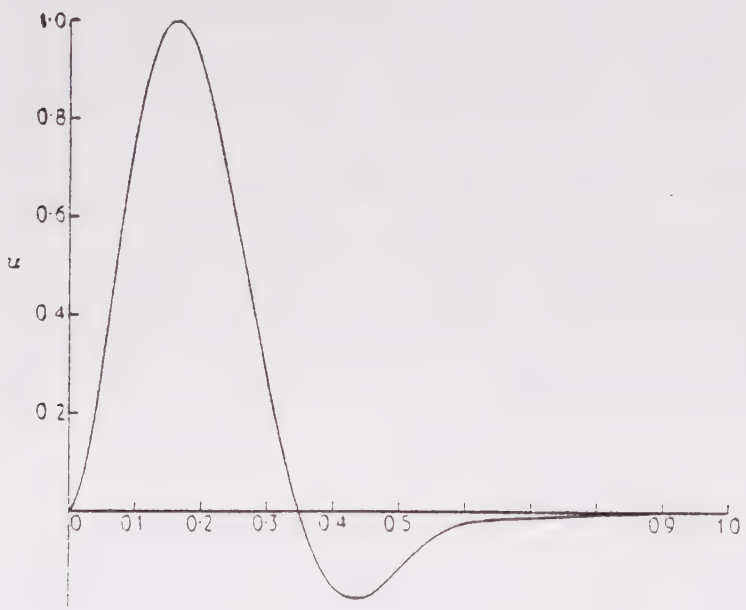


Figure 10

Profil de la vitesse angulaire normalisée à l'unité dans l'instabilité de Taylor Couette pour u = -3. D'après un résultat de Chandrasekhar[37].

pouvaient être améliorés. La méthode de calcul que nous venons de décrire dans ce paragraphe et qui s'avère fiable lorsque $\lambda \geq 1$, ne fournit pas de résultats précis dans la limite des petits rapports d'aspect. Pour, $\lambda = 0.1$, par exemple le nombre de Rayleigh critique quelque soit le mode angulaire considéré (chap.IV) se trouve situé autour de la valeur 2000, soit 20% plus élevé que la valeur asymptotique, 1708, pour une couche plane infinie. Dans cette limite, Gershuni et Zukhovitskii ont montré qu'en choisissant n (l'entier qui caractérise le mode angulaire) grand d'une part et en supposant d'autre part que le nombre d'onde radial k varie comme λ^{-1} on obtenait une expression asymptotique pour le nombre de Rayleigh défini de la façon suivante :

$$Ra^* = Ra(2\lambda)^4$$

où Ra est une fonction de $k^* = 2\lambda k$. En minimisant Ra^* par rapport à k^* on trouve les paramètres critiques suivant :

$$Ra_c^* = 1717 \quad \text{et} \quad k_c^* = 3.1$$

Numériquement il est impossible de retrouver ce résultat sans tenir compte d'une superposition de modes radiaux. Comme la méthode décrite dans ce paragraphe se prête mal à une telle généralisation nous avons utilisé un autre ensemble de fonctions d'essai pour la température. Les résultats obtenus avec ces nouvelles fonctions sont discutés dans le paragraphe suivant.

7. Fonctions d'essais pour la température - deuxième exemple

Afin d'améliorer les résultats déjà obtenus dans la limite des petits rapports d'aspect nous avons aussi travaillé avec un ensemble de fonctions d'essai qui conduit à une écriture plus automatique des intégrales et donc à une programmation plus rapide. Ce choix consiste à développer θ de la manière suivante :

$$\theta = \cos n\varphi \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} D_{ij} \; J_n(\alpha_i r)(\lambda^2 - z^2) z^{j-1} \qquad (103)$$

où $J_n(\alpha_i) = 0$ pour des parois latérales conductrices et $J_n'(\alpha_i) = 0$ pour des parois isolantes. On remarquera qu'en utilisant l'expression (103) on introduit un nouvel ensemble de coefficients, D_{ij}, à déterminer. L'avantage de cette expression est qu'elle ne contient plus de coefficients ajustables

comme l'étaient les coefficients a_{ik} dans le paragraphe précédent. L'avantage de la méthode décrite précèdemment et qui utilisait les expressions (85), (90) est qu'avec peu de fonctions d'essai K = 1 et L = 2 dans (85) par exemple, on obtenait déjà des résultats significatifs. Son inconvénient est qu'aux ordres élevés de l'approximation de Galerkin la convergence dépend de façon cruciale du choix des paramètres ajustables a_{ik}. Les nouvelles fonctions d'essai (103) ne permettent pas par contre d'obtenir de résultats significatifs tant que K reste inférieur à 3 et L reste inférieur à 2. Mais cette fois on peut poursuivre le calcul aux ordres plus élevés, K+L > 5, de manière systématique et sans difficultés majeures. En particulier dans la limite des petits rapports d'aspect où il est nécessaire de considérer la superposition d'au moins 5 modes radiaux $K \geq 5$, nous avons obtenu de bien meilleurs résultats qu'avec la première méthode où nous n'avions pu examiner que le cas de modes radiaux purs (K = 1). Rappelons que les fonctions de Bessel, $J_n(\alpha_i r)$, ont déjà été utilisé par Charlson et Sani, elles étaient associés dans leur cas aux fonctions d'essai pour la vitesse décrites en (68). Dans le calcul présenté ici nous avons travaillé avec l'association des fonctions d'essai (75a,b,c) et (103) respectivement pour les vitesses et la température. Les nombres de Rayleigh critiques obtenus dans le cas des liquides ordinaires et pour des rapports d'aspect, $1 < \lambda < 10$, avec un seul mode radial et un seul mode axial pour les vitesses (K = 1, L = 1) et 3 modes radiaux et deux modes axiaux pour la température (K = 3, L = 3) figurent dans la première partie du tableau ci-dessous pour les modes angulaires purs n = 0, 1 et 2.

$\vec{u}$(K=1, L=1), θ(K=3, L=3)				$\vec{u}$(K=5, L=3), θ (K=5, L=5)		
λ \ n	0	1	2	0	1	2
1	753.4	536.3	1108.3	733.2	510.0	1050.3
2	527.3	271.3	799.3	511.3	260.9	764.8
5	473.8	229.3	733.9	461.6	221.6	706.1
10	466.3	224.2	725.2	454.8	217.0	698.5

Table 4

Ces résultats sont à comparer avec ceux de la Table 2, obtenus avec la même fonction d'essai pour la vitesse mais des fonctions d'essai différentes

pour la température. On constate que nos derniers résultats (Table 4) s'intercalent entre les résultats des deux premières approximations de la première méthode. Dans la seconde partie du Tableau (4) figurent les nombres de Rayleigh critiques obtenus cette fois avec des fonctions d'essai pour la vitesse et la température qui sont une superposition de cinq modes radiaux (K = 5) et avec une dépendance axiale paire et telle que L = 3 pour la vitesse et L = 5 pour la température. Ces résultats sont très bons à la fois pour $\lambda = 1$ où l'on retrouve le résultat de Charlson et Sani et pour $\lambda = 10$ où l'on s'approche de la limite d'Ostroumov. Les nombres de Rayleigh critiques obtenus avec les mêmes fonctions d'essai mais dans la limite des petits rapports d'aspect figurent dans le tableau suivant :

$1/\lambda$ \ n	0	1	2
2	2544.9	2983.9	3410.6
3	2011.3	2058.4	2239
4	1886.8	1882.9	1895.6
5	1811.6	1820.7	1826.6
6	1784.4	1781.8	1785.7
7	1761	1763.8	1764.1
8	1751.5	1749.6	1750.6
9	1742.1	1742.3	1741.8
10	1773.6	1738	1735.8

Table 5

La valeur anormalement élevée qui figure à la dernière ligne de la colonne n = 0 montre qu'on devrait tenir compte d'un sixième mode radial pour la température, en effet le nombre d'onde pour le cinquième mode radial vaut respectivement pour la vitesse et la température $k_5^{(o)} = 17.96$ et $\alpha_5^{(o)} = 14.93$. En tenant compte de $\alpha_6^{(o)} = 18.07$ qui est du même ordre de grandeur que $k_5^{(o)}$ on obtiendrait une meilleure approximation.

Les nombres de Rayleigh du Tableau (5) sont à comparer avec les résultats de Charlson et Sani obtenus avec une superposition de dix modes radiaux. Nos résultats obtenus avec seulement cinq modes radiaux étant identiques aux leurs on en déduit que les fonctions d'essai (75a,b,c) pour la vitesse

constituent une meilleure approximation que les fonctions (68a,b). Après avoir testé la convergence de la méthode de Galerkin avec les nouvelles fonctions d'essai (103) pour la température, dans le cas des liquides ordinaires, nous présentons les nombres de Rayleigh critiques obtenus dans le cas de l'eau lorsque les parois latérales sont conductrices :

λ \ n	0	1	2
0.1	1761.8	1725.3	1722.3
0.2	1797.1	1805.3	1811.8
0.5	2510.5	2937.9	3351.4
1	693	495.4	987.5
2	424	231.6	622
5	313.2	153.1	468.7
10	284.6	137	430.2

Table 6

Ces résultats ont été obtenus avec $K \leq 5$ et $L \leq 7$ dans l'expression (103) de la température. En fait pour les petits rapports d'aspect, $\lambda < 1$, la valeur $L = 4$ suffit à assurer une précision de 1%, c'est à dire qu'en prenant $L = 5$, le nombre de Rayleigh critique ne varie pas de plus de 1% par rapport à l'approximation précédente. Dans la limite des grands rapports d'aspect, $\lambda > 1$, c'est la valeur de K qui peut être réduite sans nuire à la précision du calcul,en général avec $K = 3$ la précision requise (1%) est atteinte.

Les résultats du Tableau 6 confirment l'abaissement du nombre de Rayleigh critique, déjà prédit avec la méthode précédente (§III.6). La comparaison des Tableaux 4 et 5 avec le Tableau 6 montre que cet abaissement, qui est seulement de 2% lorsque $\lambda < 1$, atteint 40% lorsque $\lambda = 10$. Ce phénomène n'a pas encore été observé expérimentalement pour deux sortes de raisons. D'une part le nombre de Rayleigh n'est pas connu expérimentalement avec une précision inférieure à 10%, l'incertitude portant essentiellement sur la valeur de la viscosité ν et de la diffusivité thermique χ. A titre d'exemple la viscosité de l'eau en centipoises vaut 1.792 à 0°C et 1.567 à 4°C. Il est donc exclu de déceler l'abaissement du nombre de Rayleigh critique pour des rapports d'aspect inférieurs à 2. Au-dessus de cette valeur ce sont des difficultés d'ordre technique qui rendent délicate

l'exploration près du seuil de l'instabilité. En effet dans les expériences décrites en Annexe B, une fois le rapport d'aspect fixé, le nombre de Rayleigh ne dépend plus que de la différence de température ΔT, qui jusqu'à présent était fixée à 4°C. Il est possible d'abaisser ΔT en augmentant la température de la plaque inférieure et il ressort d'un calcul élémentaire que la différence de température critique pour le mode n = 1 et un rapport d'aspect égal à 2 est 0.5°C. Or il est difficile de réaliser expérimentalement un gradient de température qui soit parfaitement linéaire lorsque les températures extrêmes T_1 et T_2 sont trop éloignées de la température ambiante. Les problèmes d'isolation thermique font qu'en général on observe un "ventre" de température à la mi-hauteur et la convection démarre pour un nombre de Rayleigh approximativement égal au double du nombre de Rayleigh critique prévu par la théorie.

Pour conclure rappelons que Clever et Catton[36] ont également étudié la commodité d'emploi de plusieurs sortes de fonctions d'essai pour la vitesse et la température, dans un problème de convection en géométrie cylindrique. Il s'agissait de déterminer le type d'écoulement dans un cylindre vertical partiellement rempli d'un fluide à grand nombre de Prandtl et chauffé latéralement.

IV. "Thermoconvective instability of water between 0° and 4°C"
par M. Azouni et C. Normand

ABSTRACT

Thermoconvective instabilities were investigated in cylindrical water layers under a 0 - 4°C vertical temperature gradient. For aspect ratios (height/diameter) ranging from 0.3 to 5.7, angular flow patterns were deduced from thermocouples measurements. The first two diametrically antisymmetrical modes (n=1,2) were detected in the steady and unsteady regime. Slow oscillatory motions with a characteristic time of severals hours are found for aspect ratios (height/diameter) larger than 2. The Fourier analysis of the angular temperature distribution at regular time intervals yields the result that the vertical nodal planes rotate around the cylinder axis in the oscillatory regime. Concurrently the Galerkin method has been used to obtain the steady vertical modes of flow. The calculations show a transition from a symmetrical vertical mode to an asymmetrical one as λ increases. A mechanism is proposed to relate this transition to the occurrence of oscillatory instability.

Submitted for publication to
"Journal of Fluids Mechanics"

Dph-T/157/80
July 1980

In the field of crystal growth, the importance of natural convection and its influence on crystalline anisotropy is now well established, (Carruthers, 1976). In a particular case of solidification process, namely the freezing of ice in aqueous solutions we had previously reported that helicoïdal distribution of impurities in ice is associated with periodic oscillations of the temperature in the fluid (Azouni, 1977). In these previous experiments conducted in a vertical cylinder, the top boundary was open to the ambient air and the bottom boundary consisted in an advancing ice-water interface. In this situation too many factors have to be taken into account, they are :

i) the moving and non planar bottom boundary.

ii) the phase change at the ice-water interface.

iii) the generation of a convective layer due to the density inversion of water near 4°C.

iv) a possible penetrative convection above the 4°C isotherm.

In order to progress in the understanding of the mechanism responsible for the observed oscillatory temperatures, we have focused attention on point iii) and devised a new experiment especially to specify the convective flow pattern and study the onset of time-dependent convection in a cylindrical water layer submitted to a 0 - 4°C temperature gradient. The vertical gradient being fixed the behaviour of the system is controlled by the height of the cylinder, which is variable. In the stationary regime the spatial mode of flow is characterized both experimentally and theoretically. Its angular structure is determined by thermocouple measurements whereas the vertical structure of the flow pattern is found theoretically using a Galerkin approach.

Among the recent theoretical studies dealing with cylindrical geometry the works of Charlson and Sani (1970) and those of Gershuni and Zukhovitskii (1972) are of importance. Unfortunately all these studies concerned ordinary fluids i.e. fluids limited to a temperature region where their density is a linear function of temperature. Bismuth, antimony, gallium and water exhibit a maximum in their density and apparently there has been no theoretical work done in a range of temperature including non linear density effects in a fully confined geometry. Convection in a water layer of infinite horizontal extent was analyzed for the first

time by Veronis (1963). Since this notable work, many numerical analyses have been performed the most recently known to us being that of Merker et al (1979). If the results of the studies mentioned above are likely to remain valid in the small aspect ratios limit (diameter much larger than height), we suspect that in a tall, narrow cylinder both the influence of lateral boundary and the non linear density profile of water have a strong influence on the preferred mode of flow. In section 4 the corresponding theoretical analysis is carried out both for conducting and insulating sidewalls and for aspect ratios ranging from 0.1 to 10. Our experimental finding confirms that the convective behaviour depends upon a geometrical factor and becomes time-dependent at large aspect ratios. This is shown in section 3.

Oscillatory motions in cylindrical geometry had already been reported by Mitchell and Quinn (1966). Their working fluid was gas and the convective pattern was detected by smoke injection, which, as they themselves quoted, is a rather disturbing method. For a review of the literature on oscillatory motions in cylindrical convective fluid layers we shall refer to the recent work of Olson and Rosenberg (1979). The test fluids in their experiments were also gases and they used local probe measurements as detection system for the onset of instability. Though the kinds of instabilities leading to oscillatory motions in unbounded convective fluid layers have been studied in details in the past decade (Busse 1967, 1972, Clever and Busse, 1974), similar results are still lacking in a finite geometry and an open field of research is the stability of convective flows toward sidewall disturbances. A mechanism is presented in section 5 to connect the temperature oscillations with the predicted transition the vertical structure undergoes as the aspect ratio increases.

2. EXPERIMENTAL APPARATUS AND PROCEDURE

The cell used in this work is shown in Fig.1. It consists in a cylinder of variable height and a diameter D of 35 mm. The lateral wall is constructed in 2 mm thick plexiglas surrounded by 15 cm of polystyrene. The top

and the bottom plates limiting the test section are made of copper. The height h of the sample is controlled by the position of the two plates.

During these experiments, h can be varied from 1 cm to 20 cm. The cell is filled with degassed water. The following procedure is used in all the runs. The filled test section is maintained at room temperature for several hours prior to the start of the experiments. This is to assure a uniform temperature in the sample. The desired temperature gradient in the tube is maintained by circulation through the copper plates of an alcohol-water mixture, the temperature of which is controlled by an external thermostat system. In the present case, the bottom plate is fixed at 0°C and the top at 4°C.

The temperature distributions in water are measured using twelve electrically insulated constantan-manganine thermocouples which are located on the lateral walls around the cylinder cross-section with a 30° spacing. They make direct contact with the test fluid. Their signals are amplified and recorded by a digital data-acquisition system (H P 3050A). Thermocouple readings are accurate within $\pm$ 0.04°C. The horizontal plates can be moved so that the plane in which experiments are performed always coincides with the mid-height plane of the cell. Observation of the temperature gradient is continued for a time much longer than the thermal relaxation time defined by h^2/χ (χ being the thermal diffusivity) and estimated to range from 1 mn for h=1 cm to more than 3 days for h=20 cm.

The purpose of the experimental work is to find out the azimuthal temperature distribution in the mid-cross-section of the cylinder as a steady state is attained.

3. EXPERIMENTAL RESULTS

The experimental results may in general be divided into two categories, which depend upon the aspect ratio : $\lambda = h/D$

i) time-independent phenomena for $0,3 \leq \lambda < 2$

ii) time-dependent phenomena for $2 \leq \lambda \leq 5.7$

3.1 TIME INDEPENDENT PHENOMENA

Starting with a water column of 1 cm high, the cylinder height is then increased centimeter by centimeter. Between each run the cell is emptied and filled again. For any height of the water column ranging from 1 to 6,5 cm, the temperatures recorded by the thermocouples remain constant and stable during several days.

The thermocouples being labelled by the index i = 1,2,...,12, the corresponding temperatures Θ_i have been plotted versus the angle $\varphi_i = (i-1)\frac{\pi}{6}$ for different heights. Two typical curves are shown on Fig.2. For these curves and those which are not represented here a Fourier analysis allows us to determine the angular flow pattern :

$$\Theta(\varphi) = \bar{\Theta} + \sum_n a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$$

where each integer characterizes a spatial mode and the amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ of harmonics higher than 2 is negligible with respect to those of the first two modes (n=1,2).

For each run we notice that the mean temperature $\bar{\Theta}$ is around 2.2°C and that the amplitudes A_1 and A_2 do not exceed 0.8°C. Moreover the mode n=1 is almost predominant except in two cases

a) h = 2 cm, with an amplitude A_2 = 0.6°C the mode n = 2 compares favourably with the mode n = 1 of which the amplitude is A_1 = 0.75°C.

b) h = 3 cm, with A_1 = 0.27°C and A_2 = 0.75°C, the preferred mode is n = 2.

3.2 TIME DEPENDENT PHENOMENA

For h $\geq$ 7 cm the convective behaviour is completely different. Slow temporal temperature oscillations occur. These signals have been recorded up to 24 hours after the beginning of the experiment ; hence the oscillations cannot arise from transitory effects. Figure 3 shows two relevant examples of oscillatory motion recorded respectively for h = 8 cm and h = 9 cm. The angular temperature distributions drawn at times t_1 and t_2 separated by an hour are shown on Fig.4.

In order to specify the angular structure of the flow pattern during the unsteady regime, it is necessary to define what we call a nodal plane. On the circular section of the cylinder where the thermocouples are regularly distributed, we define a node as a point where the temperature is equal to the mean temperature $\bar{\Theta}$. At a given time, the Fourier analysis of the angular temperature distribution give the position of the nodes. There is always an even number of nodes : two, when the mode n = 1 prevails, or four when the mode n = 2 is predominant. By joining a pair of nodes, one gets a segment which can be viewed as the projection of a vertical nodal plane which divides the fluid in zones of respectively upward and downward flows. The time evolution of these nodal planes is now discussed on two examples.

a) h = 8 cm (λ = 2.29)

From the data of Fig.3a, the angular temperature distribution is systematically drawn at intervals of 15 mn (two of these curves are shown on Fig.4a). The spectral analysis of these curves yields the result that the mode n = 2 is always predominant with a nearly constant amplitude of 0.4°C. The amplitude of the mode n = 1 is nearly equal to 0.2°C. The new feature is the time evolution of the two nodal planes (Fig.5a). If at an arbitrary initial time t_o the nodal planes are in the position A in Fig.5a, they evolve through the sequence of positions B-C-D and E before they return to A. The cyclic sequence of events A-B-C-D-E-A is reproducible starting from another initial time t'_o suitably chosen, and the time between two positions labelled A remains 193 $\pm$ 2 mn. Though the recorded temperature oscillations shown in Fig.3a are not obviously periodic, it is nevertheless possible to find a characteristic time during which the nodal planes completely rotate in the mid-height cross-section.

b) h = 9 cm (λ = 2.57)

The spectral analysis of the angular temperature distributions drawn on Fig.4(b) reveals that at time t_1, the mode n = 2 predominates, while one hour after, at time t_2, the mode n = 1 prevails. The consequence is immediate when one looks at the time evolution of the nodal planes (Fig.5b). At an initial time t_o, the two nodal planes of the mode n = 2 are found in position A, then, they evolve through the sequence of events B, C and D, but in the next position, E, there is a unique nodal plane.

Two nodal planes are found again in position A, 266 mn after the beginning of the sequence. During this time there has been an exchange between the mode n = 2 and n = 1 and a rotation of the nodal planes. We are observing here a more complex phenomenon than in a). The cyclic sequence is reproducible and the time between two positions A is 262 $\pm$ 8 mn.

3.3. SUMMARY OF EXPERIMENTAL RESULTS

The analysis of the angular temperature distribution has shown that, for $\lambda < 2$, convection is stationary and involves the first two diametral antisymmetrical modes, while for $\lambda \geq 2$, convection is time-dependent and displays dynamical exchanges between the convective modes with a complete rotation of the nodal planes.

Let us notice that our experiments are always carried out in a supercritical regime and the experimental Rayleigh numbers are estimated now to measure the distance from the threshold. In the small aspect ratios limit the Rayleigh number is defined as :

$$Ra = \frac{\beta \Delta T^2 g\ h^3}{\nu\ \chi}$$

where ν is the kinematic viscosity, χ the thermal diffusivity g the acceleration of gravity, $\Delta T = 4°C$ and β is given in section 4. In this limit the Rayleigh number must be compared to the critical value $Ra_c = 1707{,}8$. For instance the run where h = 1 cm corresponds to $Ra = 3Ra_c$ and consequently to a linear regime. When the height of the cylinder exceeds its radius R, the Rayleigh number is defined as :

$$Ra = \frac{\beta \Delta T^2 g\ R^4}{\nu\ \chi\ h}$$

and the critical values which depend on the aspect-ratio λ and the angular mode n are given in section 4. Forecasting on the theoretical results, the experimental Rayleigh number when h = 3 cm is estimated to be around 40 Ra_c and obviously a non linear regime is attained. Therefore it is not suprising that the mode n = 2 has reached an amplitude greater than that of the mode n = 1. In fact, the maximum of non linearity is obtained for h = 6 cm with $Ra = 95\ Ra_c$. Then, when the height is increased the experimental Rayleigh

number decreases as the inverse power of h, while its critical value quickly reaches an asymptotic value and in the last run (h=20 cm) we obtained Ra = 50 Ra_c. It has been shown that the time dependent regime occurs for a height of the cylinder ranging from 7 to 20 cm which corresponds to the Rayleigh numbers ranging from 50 to 90 Ra_c. Water is a fluid whose Prandtl number Pr is nearly equal to 10 and the Rayleigh numbers for the occurrence of oscillatory instabilities are much larger than those reported by Verhoeven (1969) in liquid metals (Pr = 0.025) and Olson and Rosenberger (1979) in gaseous systems (Pr = 0.7).

Our experimental method allows us to determine the angular structure of the flow pattern accurately. However to fully characterize the convective structure it is necessary to know the vertical mode of flow. A theoretical approach has been carried out in the next section to specify the vertical planform in closed cylinders of various aspect ratios when the fluid density is a quadratic function of the temperature and the density maximum is located at the top boundary.

4. THEORETICAL APPROACH

The influence of the density anomaly on the onset of convection in a water layer has been studied by several authors, but all of them have neglected the effect of lateral boundary. In the present analysis both the aspect ratio of the cell and the conductivity of the sidewalls have been taken into account. The system that we consider is a cylindrical water layer of height h and radius R ; the horizontal walls are rigid, perfectly conductors and maintained at different but uniform temperature : 0°C for the lower wall and 4°C for the upper one.

A realistic thermal boundary condition on the lateral walls would be of the form :

$$\vartheta = \mathcal{B} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad \text{at } r = R$$

where $\mathcal{B}$ is a Biot number, a detailed calculation of which is given in Appendix A. The experimental cell is surrounded by polystyrene which corresponds to the case (b) of this Appendix. In this situation a supplementary difficulty arises because $\mathcal{B}$ depends upon n. When the thickness of the lateral walls a is small compared to the radius of the cylinder R, $\mathcal{B}$ can

be simplified :

$$\mathcal{B}_n = \frac{\kappa_F}{\kappa_S} \frac{R}{na} \qquad n \geq 1$$

where κ_F is the thermal conductivity of water ($1.34\ 10^{-3}$ cal $s^{-1}cm^{-1}°C^{-1}$) κ_S that of plexiglass (5.10^{-4} cal $s^{-1}cm^{-1}°C^{-1}$). The geometrical factor $\frac{R}{a}$ has already been given in part 2. For the mode n = 2, $\mathcal{B}_2 \sim 12$.

Calculations have been undertaken for three values of $\mathcal{B}$, that is $\mathcal{B} = 0$ (conducting sidewalls), $\mathcal{B} = 1000$ (insulating sidewalls) and $\mathcal{B} = 10$, an intermediate case relevant to our experimental situation .

The governing equations of the system are the continuity equation, the Navier-Stokes equation of motion, the heat equation in the usual Boussinesq approximation. In the present case the fluid density ρ is assumed to be a parabolic function of the temperature T according to the relationship :

$$\rho = \rho_o[1-\beta(T-T_o)^2] \tag{1}$$

which is accurate within 4 % between 0° and 8°C when $\rho_o = 1.0$ g/cm^3, $\beta = 8.1\ 10^{-6}\ °C^{-2}$, $T_o \simeq 4°C$.

The above assumption leads to the following set of linear equations for the perturbation of velocity $\vec{u}$, temperature θ and pressure p.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_o}\vec{\nabla}p + \vec{g}\left(\frac{\rho}{\rho_o} - 1\right) + \nu \Delta \vec{u} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_z \frac{T_o}{h} = \chi \Delta \theta \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0$$

The total temperature T is the superposition of the conducting linear profile $\frac{T_o}{h} z$ ($0<z<h$) and the convective perturbation θ. According to this statement, expression (1) can be linearized as a function of θ neglecting the quadratic terms in θ^2 and then substituted in (2). It is now convenient

to bring (2) - (4) into a dimensionless form :

$$\vec{r} = R\,\vec{r}',\ \vec{u} = \frac{\chi}{R}\vec{u}',\ \theta = \frac{T_o R}{h}\theta',\ t = \frac{R^2}{\chi}t',\ p = \frac{\nu\chi\rho_o}{R^2}p'$$

After dropping the prime all the variables being now non-dimensional the equations (2) - (4) read :

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla}p + Ra\,\hat{e}_z\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)\theta + \Delta\vec{u} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -u_z + \Delta\theta \qquad (6)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \qquad (7)$$

$\hat{e}_z$ is the unitary vector in the upward z direction. We have defined two important parameters : the aspect ratio $\lambda = \frac{h}{2R}$ and the Rayleigh number :

$$Ra = \frac{\beta T_o^2 R^4 g}{\nu\chi h}$$

Notice that in equations (5) - (7) the origin of the z-axis has been taken at the middle height of the cell so that :

$$-\lambda < z < +\lambda$$

The boundary conditions are :

$$\left.\begin{matrix}\vec{u} = 0\\ \theta = 0\end{matrix}\right\} \text{at } z = \pm\lambda \quad \text{and} \quad \left.\begin{matrix}\vec{u} = 0\\ \theta = \mathcal{B}\frac{\partial\theta}{\partial r}\end{matrix}\right\} \text{at } r = 1$$

At this stage of the account let us recall that the stability of a water layer of infinite horizontal extent, near its maximum density is often compared to the stability of Couette flow, this was first pointed out by Chandrasekhar (1961). In the latter problem λ is the ratio of the rotation rates of the outer to the inner cylinder.

Krueger et al. (1966) have shown for the Couette flow that time depen-

dence of the solutions in the form $e^{\sigma t}$ with vanishing real part of σ together with finite imaginary part could be expected for certain value of their parameter λ, leading to oscillatory instabilities. Though the analogy mentioned above is not obvious in the present finite box problem, the same behaviour cannot be excluded. However the Runge-Kutta numerical procedure used by Krueger et al. to solve their eigenvalue problem is not easy to work out when there is more than one-space variable. We intend to solve this problem eventually, however, before doing this, it is of prime importance to establish the flow pattern in the stationary state within a tall, narrow cylinder of water. Hence, equations (5) - (7) are solved for $\sigma = 0$ using Galerkin's method which is discussed intensively in the book by Finlayson (1972). The unknown solution $\vec{u}$ are approximated by :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \vec{u}^{(i)} \tag{8}$$

where each of the test functions $\vec{u}^{(i)}$ satisfies the continuity equation and the boundary conditions. Having chosen $\vec{u}$ in this manner, we next solve the equation (6). The general solution can be written in the form :

$$\theta = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \theta^{(i)} \tag{9}$$

The trial functions (8) and (9) are substituted into (5) to form the residual :

$$\vec{\mathcal{R}} = - \vec{\nabla} p + \sum_{i=1}^{N} a_i \left[Ra \, \hat{e}_z \left(\frac{z}{\lambda} - 1 \right) \theta^{(i)} + \Delta \vec{u}^{(i)} \right]$$

The Galerkin method requires $\vec{\mathcal{R}}$ to be zero by making it orthogonal to every test functions $\vec{u}^{(i)}$:

$$\int_0^1 r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\lambda}^{+\lambda} dz \; \vec{u}^{(j)} \cdot \vec{\mathcal{R}} = 0 \qquad j = 1, \ldots, N \tag{10}$$

where we have introduced the cylindrical coordinates (r, φ, z). This leads to the following set of N linear, homogeneous algebraic equations for the unknown coefficients a_i :

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \left[Ra \, P_{ji} + Q_{ji} \right] = 0 \qquad j = 1, \ldots, N$$

where

$$P_{ij} = \langle u_z^{(i)} \left(\frac{z}{\lambda} - 1 \right) \theta^{(j)} \rangle$$

$$Q_{ij} = \langle \vec{u}^{(i)} \cdot \Delta \vec{u}^{(j)} \rangle ,$$

and the brackets denote integration over the volume of the cell. The condition for the existence of a non trivial solution is that the determinant of coefficients vanishes. This happens for certain combination of the values Ra and λ only. Then the critical Rayleigh number is the lower root of :

$$\text{DET } [\text{Ra } P(\lambda) + Q(\lambda)] = 0, \qquad (11)$$

where the elements of matrices P and Q are given above. The choice of the test functions $\vec{u}^{(i)}$ is governed first by the incompressibility condition :

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{du_\varphi}{d\varphi} + \frac{du_z}{dz} + \frac{u_r}{r} = 0$$

Particular solutions of this equation are those in which the radial, angular and axial components of the velocity are harmonic functions of φ :

$$\vec{u} \equiv \left\{ u_r, \; u_\varphi, \; u_z \right\}$$

$$u_z(r,\varphi,z) = \cos n\varphi \; u(r) \; f(z)$$

$$u_r(r,\varphi,z) = - \sin n\varphi \; v(r) \; f'(z) \qquad (12)$$

$$u_\varphi(r,\varphi,z) = - \sin n\varphi \; w(r) \; f'(z)$$

Depending on n (integer) these formulae describe different angular modes. The radial functions u(r), v(r), w(r) are given in the book by Gershuni and Zukhovitski (1972) :

$$u = \frac{J_n(kr)}{J_n(k)} - r^n$$

$$v = -\frac{1}{kJ_n(k)}\left[J_n'(kr) - J_n'(k)\, r^{n+1}\right] \qquad (13)$$

$$w = \frac{n}{k^2 J_n(k)}\left[\frac{1}{r} J_n(kr) - J_n(k)\, r^{n+1}\right]$$

where k is a root of the transcendental equation

$$k\, J_n''(k) = (n+1)\, J_n'(k) \qquad (14)$$

Here and below, J_n is the n-th Bessel function of a real argument ; the prime denotes differentiation with respect to the argument.

For each n there is a discrete spectrum of k values satisfying (14) : increase in k implies an increase in the number of radial velocity nodes. For the axisymmetrical mode n=0 the i-th root k_i is associated with a flow which has i radial rolls. Charlson and Sani (1970) have shown for ordinary liquids in cylindrical geometry that the number of rolls increases with decreasing aspect ratios. We have only considered the five smallest roots of (14). Thus in the following a convective mode will be characterized by two numbers n and i ranging respectively from 1 to 2 and from 1 to 5.

The function f(z) which appears in (12) depends upon the order of the Galerkin approximation. To the N-th order :

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N} a_i\, W_i \qquad (15)$$

where W_i can be represented as a power serie in z

$$W_i = (\lambda^2 - z^2)^2\, z^{i-1}$$

So that u_z, u_r, u_φ satisfy the boundary conditions for $z = \pm \lambda$. Expressions (13) and (15) determine the test function $\vec{u}$ completely. The detailed calculation of the matrix elements Q_{ij} and P_{ij} is done in Appendix B. We then

have all the elements to solve (11). The first approximation gives us :

$$Ra_c = - \frac{Q_{11}}{P_{11}}$$

This reproduces the result of Gershuni (1972) for ordinary liquids. In the second approximation the critical Rayleigh number appears as the smallest real root of a second order polynomial. For higher approximations the critical Rayleigh number is found using a Newton iteration procedure, starting with a guessed solution , usually the result of the previous approximation. Between 2 and 5 iterates are sufficient to obtain a converged solution .

4.1 RESULTS AND COMMENTS

The values of the critical Rayleigh number for conducting and insulating sidewalls are listed in Table 1 for those values of k at which Ra attained its minimum value. It is sometimes necessary to go up to the sixth Galerkin approximation to achieve an accuracy less than 1 %. The curves of marginal stability are drawn on Fig.6 for a value of the Biot number representative of our experimental situation ($\mathcal{B}$=10).

In the small aspect ratios limit the choice of the radius as the characteristic length scale of the problem is no longer appropriate and instead of it we must choose h so that the Rayleigh number which appears in (5) now takes the form

$$Ra^* = \frac{\beta T_o^2 h^3 g}{\nu \chi} = Ra(2\lambda)^4$$

with the corresponding value of the wavenumber :

$$k^* = 2\lambda k$$

Inspection of Table 1 shows that in the limit $\lambda \to 0$ the critical Rayleigh number Ra_c^* takes an asymptotic value (around 2000 for n=2). It can be expected that if we take the limit $n \to \infty$ simultaneously as suggested by Gershuni [1972], we should find the critical Rayleigh number for a plane infinite layer of fluid, say 1707.8.

More generally for small aspect ratios the critical Rayleigh numbers do not differ very much from those found in the case of ordinary liquids. For instance, Charlson and Sani (1970) have reported for the larger aspect ratio they considered, that is $\lambda = 1$, and for the axisymmetrical mode, a critical Rayleigh number $R\tilde{a}_c^* = 11725.08$ which is converted in $Ra_c = 733$, while we find $Ra_c = 700$. The difference which does not exceed 4 %, can be attributed to a different choice of trial functions. In the large aspect ratios limit we have extended the results of Gershuni and Zukhovitskii (1972) in the case of ordinary liquids to higher Galerkin approximations and finally found, for $\lambda = 10$ and $n = 0$, a critical Rayleigh number very close to the Ostroumov limit $Ra_c = 452$. In the same circumstances for water we found $Ra_c = 322$. One can no longer attribute the difference (40 %) to the accuracy of the Galerkin method. This will be discussed in the light of the following paragraph.

Fig.7 shows the deformation of the vertical velocity profile $f(z)$ for a variation of λ ranging from 0.1 to 10 and $\mathcal{B} = 10$. At small aspect ratios the profile is rather symmetrical with respect to the middle height of the cell. But with increasing λ it distorts itself and for higher aspect ratios the maximum of the velocity amplitude is shifted towards the bottom of the cell. Moreover for a certain value of λ which depends upon n an horizontal plane of vanishing velocity appears in the upper half-height of the layer. Above this plane the relative amplitude of the velocity is so small that it can be neglected. Thus in the limit $\lambda \to \infty$, convection only takes place in a fraction $\frac{h_e}{h}$ of the total height and is overlaid with a layer of steady water. This can be related to the lowering of the critical Rayleigh number mentioned above. Let us define an effective Rayleigh number relative to the part of the layer undergoing vigourous convective motions and whose height is h_e :

$$Ra^{(e)} = \frac{\beta T_o^2 R^4 g}{\nu \chi h_e} = Ra \frac{h}{h_e}$$

For $n = 0$ and $\lambda = 10$ we have $Ra_c \simeq 322$ and $h_e = 0.68$. So that $Ra_c^{(e)} \simeq 470$. This value approaches the value 452 given by Ostroumov (1952) in the limit $\lambda \to \infty$ and with an initial linear density gradient.

Our calculations suggest that a distinction is to be made between the small aspect ratios limit where the properties of the flow are those of the usual Rayleigh convection and the large aspect ratios limit. In this latter case, the results of Ostroumov (1952) for convection in a tall, narrow cylinder are more suitable. However it is worthwile at this stage to notice the main difference between ordinary liquids and water or more generally non Boussinesquian fluids. In ordinary liquids, when the top and bottom boundary conditions are identical, the symmetry of the problem breaks up the solutions into two classes : even and odd modes with respect to the mid-height of the cell. In the case of water the solutions have not any given parity in z and a possible scheme for the vertical mode of flow is shown on Fig.8. Such a configuration with a weak counter roll overlaying the principal roll has never been quoted for convection in water between 0 and 4°C. This typical configuration results from the combined effect of lateral boundaries and parabolic density profile.

The value of λ for which a transition between a unique vertical cell and two asymmetrical cells occurs is rather independent of the Biot number, but depends on the angular mode n and is around $\lambda = 1.8$ for $n = 0$, $\lambda = 3.2$ for $n = 1$ and $\lambda = 2.2$ for $n = 2$.

5. *DISCUSSION*

In other circumstances, but with the same geometry, Clever and Catton (1972) have reported that "the existence of multicellular flow suggests also the existence of three dimensional, possibly time dependent, flow". In our case we think that the quiescent upper layer plays a fundamental role in the occurrence of temperature oscillations. This statement is supported by the fact that the experimental value of λ for which oscillations occur ($\lambda \geq 2$) is in good agreement with the predicted theoretical value of λ from which a counter roll exist ($1.8 < \lambda \leq 3.2$). The formation of at least one counter roll is essential in isolating the principal roll from the top boundary, thus the region occupied by the counter roll behaves as a heat reservoir.

Suppose now that a pure mode $n = 1$ is excited in the cell. In the principal roll there exists a vertical diametral plane P where the velocity

gradients are maximum and the convective currents more efficient than anywhere else in order to lower the initial temperature gradient. The convection will stop first in this plane if it is not sustained by a continuous heat supply. If there exists a counter roll, heat is carried by conduction in a finite time τ, throughout the nearly stagnant region. During this time the plane P looses its property of maximum efficiency, while other neighbouring planes enjoy this privilege successively. Hence, the continuous adaptation of the system to the thermal boundary conditions gives rise to an apparent rotation of the convective structure as in Fig.4.

All these features agree with Busse's remark (1967) that periodic convection can occur when the material properties of the fluid layer are non symmetric with respect to the middle plane of the layer or when there is an adjacent layer which serves as a heat reservoir. Here the two conditions are fulfilled, the second being a consequence of the first.

6. *CONCLUSION*

In this work we have characterized the convective flow pattern in a cylindrical water layer under a 0-4°C temperature gradient. The angular structure of the flow in the steady and unsteady regime has been determined experimentally while its vertical structure results from calculations undertaken in the stationary regime. We have shown the influence of the geometry on the static and dynamical properties of the flow pattern. For small aspect ratios ($\lambda < 2$) the convective instability is stationary, in the opposite limit, the flow is time dependent. The Galerkin method has been used to obtain information about the vertical structure of the f The convective flow regime shows a transition from a vertically symm cal mode to an asymmetrical one, as the aspect ratios increases. The value of λ at which the transition occurs is between 1.8 and 3.2 depending on the values of the parameters $\mathcal{B}$ and n. As a consequence of this theoretical result a quasi motionless boundary layer develops which relaxes the top boundary condition and allows the possibility of time-dependent motions. The nature of the temperature oscillations will be definitely ascertained by a mathematical treatment including time derivatives and non linear terms in the governing equations. This analysis remain to be done.

APPENDIX A

THERMAL BOUNDARY CONDITION ON THE LATERAL WALLS :

We consider a cylindrical layer of fluid of radius R confined laterally by a vertical pipe of thickness a and infinite height. At the lateral boundary the temperature distribution θ_S is assumed to obey Fourier's law in the steady state :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\right] \theta_S = 0 \qquad (A\text{-}1)$$

We look for solutions of the form :

$$\theta_S = \cos n\varphi \; f(r)$$

The function f(r) is determined for each angular mode. For the axisymmetrical mode (n=0) it satisfies :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) f = 0$$

whose formal solution is :

$$f = A \log r + B$$

For the diametrically antisymmetrical mode (n = 1) and more generally for $n \geq 1$ a solution of (A-1) is :

$$\theta_S = \cos n\varphi \left(\frac{A}{r^n} + Br^n\right)$$

We consider now the two following cases :

a) We assume a constant and uniform temperature θ_o along the outer surface of the pipe, so that :

$$\theta_S = \theta_o \text{ at } r = R + a$$

By changing the origin of the temperature scale we can simply write $\theta_S = 0$, thus the explicit calculation for the mode n=0 gives :

$$A \log (R + a) + B = 0 \qquad (A\text{-}2)$$

At the interface between the pipe and the fluid we assume continuity of temperature and heat flux :

$$\left.\begin{aligned} \theta_S &= \theta_F \\ \kappa_S \frac{\partial \theta_S}{\partial r} &= \kappa_F \frac{\partial \theta_F}{\partial r} \end{aligned}\right\} \quad \text{at } r = R$$

where κ_F is the thermal conductivity of the fluid and κ_S that of the walls.

By substituting the explicit expression of θ_S we have

$$A \log R + B = \theta_F \tag{A-3}$$

and $$\kappa_S \frac{A}{R} = \kappa_F D\theta_F$$

Eliminating B between (A-2) and (A-3) we get an expression for A that we substitute then in (A-4).

In dimensionless form we obtain the relationship :

$$\theta_F = \mathcal{B}_n D\theta_F$$

with : $$\mathcal{B}_o = \frac{\kappa_F}{\kappa_S} \log \frac{R+a}{R} \tag{A-5}$$

and : $$\mathcal{B}_n = -\frac{\kappa_F}{\kappa_S} \frac{1}{n} \left[\frac{(R+a)^{2n} - R^{2n}}{(R+a)^{2n} + R^{2n}}\right] \qquad n \geq 1$$

In the case of a pipe of infinite tickness we find the simple result that $\mathcal{B}$ is the ratio of the thermal conductivity of the fluid over that of the lateral walls. On the opposite, for a thin pipe one can expand $\mathcal{B}$ in powers of $\frac{a}{R}$. The lower order gives a result independent of n :

$$\mathcal{B}_n \to \mathcal{B} = -\frac{\kappa_F}{\kappa_S} \frac{a}{R}$$

b) We assume now that the whole system is enclosed by insulating walls, so that

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial r} = 0 \quad \text{at} \quad r = R + a$$

A similar calculation to that of case (a) gives the following results. For the axisymmetrical mode the boundary condition in terms of the fluid temperature reduces to :

$$D\theta_F = 0$$

For the angular modes with $n \geq 1$

$$\mathcal{B}_n = -\frac{\kappa_F}{\kappa_S}\frac{1}{n}\,\frac{(R+a)^{2n} + R^{2n}}{(R+a)^{2n} - R^{2n}}$$

When $\frac{a}{R} \ll 1$, the limit value is

$$\mathcal{B}_n \to -\frac{\kappa_F}{\kappa_S}\,\frac{R}{na}$$

APPENDIX B

COMPUTATION OF THE MATRIX ELEMENTS Q_{ij} AND P_{ij}

It can easily be shown that Q_{ij} can be written in the form :

$$Q_{ij} = \Pi \left(A \, \overline{W_i W_j} + B \, \overline{DW_i DW_j} + C \, \overline{D^2 W_i D^2 W_j} \right)$$

where $D \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ and the bar denotes integration over the z-variable alone. The quantity :

$$\overline{W_i W_j} = \int_{-\lambda}^{+\lambda} dz \; W_i W_j = \lambda^{7+i+j} \; \mathcal{E}(i+j-2,4)$$

has been expressed in term of an Euler'integral of the first kind :

$$\mathcal{E}(m,n) = \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^n \, z^m \, dz$$

The integrals arising in the expressions of $\overline{DW_i DW_j}$ and $\overline{D^2 W_i D^2 W_j}$ can be found in term of Euler integrals in the book by Finlayson (1972).

The quantities A, B and C are results of integration over the r-variables :

$$A = \frac{-k^4 + k^2 \, n(n-2) + 4n(n^2 + 2n + 2)}{2(n+2)^2}$$

$$B = \frac{1}{k^4 (n+2)^2} \left\{ - k^6 + \frac{n^2 (2n-1) k^4}{2(n+1)} + 4n(n^2+2n+4) \, k^2 - 8n^2 (n+1) \right\}$$

$$C = \frac{1}{2 \, k^4 (n+2)^3} \left\{ k^4 (n+3) + k^2 n(4-2n-n^2) - 4n(n^3+6n^2+11n+8) \right\}$$

The calculation of the matrix element P_{ij} can only be performed after we have solve equation :

$$\Delta \, \vartheta^{(i)} = u_z^{(i)}$$

Setting $\theta^{(i)} = \cos n\varphi\, g^{(i)}(z,r)$ we get an equation for g

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} g + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \left[\frac{J_n(kr)}{J_n(k)} - r^n\right] (\lambda^2 - z^2)^2 \, z^{i-1} \qquad (B\text{-}1)$$

We look for solutions which can be factorized according to :

$$g^{(i)}(r,z) = \theta^{(i)}(r)\, \tau^{(i)}(z)$$

where $\tau^{(i)}(z)$ is a polynom in z of degree $3+i$ which after allowing for (B.1) satisfies :

$$\tau^{(i)} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2\tau^{(i)}}{dz^2} = 0 \quad \text{at } z = \pm\lambda \qquad (B\text{-}2)$$

Up to the second order of the Galerkin approximation these requirements are sufficient to determine unambiguously $\tau^{(i)}(z)$, namely :

$$\tau^{(1)} = (\lambda^2 - z^2)\,(5\lambda^2 - z^2)$$

$$\tau^{(2)} = (\lambda^2 - z^2)\,(7\lambda^2 - 3z^2)z$$

but for higher approximations its remains an indeterminacy in the choice of one or more coefficients of the polynom.

The result of the first two approximations establishes that convergence is quite rapid for small aspect ratios but higher approximations are needed at large aspect ratios. A similar behaviour has been pointed out by Chandrasekhar for the stability of Couette flow. We can write $\tau^{(i)}$ in the general form :

$$\tau^{(i)} = (\lambda^2 - z^2) \sum_{k=1}^{i+2} b_{ik}\, z^{k-1} \qquad (B\text{-}4)$$

For $i \geq 3$ the coefficients b_{ik} are fixed in order to have the best convergence of the Galerkin procedure for $\lambda = 10$. Then $\theta^{(i)}(r)$ is determined by the Kantorovich method. Inserting (B-4) into (B-1), multiplying by $\tau^{(i)}(z)$ and integrating with respect to z from $-\lambda$ to λ we obtain the equation :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \alpha_i^2\right)\right] \theta^{(i)}(r) = \mathcal{N}_i\, u(r) \qquad (B\text{-}5)$$

where :

$$\alpha_i^2 = - \overline{\tau^{(i)} D^2 \tau^{(i)}} \; / \; \overline{|\tau^{(i)}|^2}$$

and

$$\mathcal{N}_i = \overline{\tau^{(i)} (\lambda^2 - z^2)^2 \, z^{i-1}} \; / \; \overline{|\tau^{(i)}|^2}$$

A solution of (B-5) for conducting lateral surface is

$$\theta^{(i)} = \frac{\mathcal{N}_i}{\alpha_i^2 (k^2 + \alpha_i^2)} \left[\alpha_i^2 \, \frac{J_n(kr)}{J_n(k)} - (\alpha_i^2 + k^2) \, r^n + \frac{k^2}{I_n(\alpha_i)} \, In(\alpha_i r) \right]$$

Thus

$$P_{ij} = \lambda^{7+i+j} \, E_j \sum_{k=1}^{j+2} b_{jk} \left[\mathcal{E}(k + i - 1, \; 3) \; - \; \mathcal{E}(k + i - 2, \; 3) \right]$$

with :

$$E_j = \frac{\mathcal{N}_j}{2\alpha_i^2 k^2 (\alpha_i^2 + k^2)^2} \left\{ \frac{\alpha_i^4}{(n+2)^2} \left[- k^4 + 4n(n^2 + 3n + 4) + \frac{k^2 n^3}{n+1} \right] \right.$$

$$+ \frac{\alpha_i^2 k^2}{(n+2)^2} \left[- k^4 + 4n(n^2 + 4n + 6) + \frac{k^2 n(n^2 + n + 2)}{n+1} \right] - \frac{k^6}{n+1}$$

$$\left. + \frac{2k^6 \, I_{n+1}(\alpha)}{\alpha I_n(\alpha)} \right\}$$

REFERENCES

Azouni M.A., 1977, Helical impurity distribution produced by a hydrodynamic instability. Journal of Crystal Growth 42, 405.

Busse F.H., 1967, Non stationary finite amplitude convection, J. Fluid Mech. - 30(4) 625.

Busse F.H., 1972, The oscillatory instability of convection rolls in low Prandtl number fluid, J. Fluid Mech. 52, 97.

Carruthers J.R., 1976, Origins of convective temperature oscillations in crystal growth melts, J. Crystal Growth 32, 13.

Chandrasekhar S., 1961, Hydrodynamic and Hydromagnetic stability. Oxford at the Clarendon press; England.

Charlson G.S. and Sani R.L., a) 1970, Thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer. Int. J. Heat Mass. Transfer, 13, 1479. b) 1971, On thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer, Int. J. Heat Mass Transfer, 14, 2157.

Clever R.M. and Busse F.H., 1974, Transition to time-dependent convection, J. Fluid Mech. 65, 625.

Clever R.M. and Catton I., 1972, Steady Natural Convection in a Vertical Cylinder at large Prandtl Number, Proc. of the 1972 Heat Transfer and Fluid Mechanisms Institute (Ed. B. Landis, J. Hordemann), 281.

Finlayson B.A., 1972, The method of weighted residuals and variational principles (Academic, New York).

Gershuni G.Z. and Zukhovitskii E.M., 1972, Convective stability of incompressible fluids, Israël Program For Scientific Translations.

Krueger E.R., Gross A. and Di Prima R.C., 1966, On the relative importance of Taylor-Vortex and non axisymmetric modes in flow between rotating cylinders 24(3) 521.

Merker G.P., Waas P. and Grigull U., 1979, Onset of convection in a horizontal water layer with maximum density effects. Int. Journal of Heat and Mass Transfer. 22(4) 505.

Mitchell W.T. and Quinn J.A., 1966, Thermal convection in a completely confined fluid layer, A.I. Ch.E, 12, 1116.

Olson J.M. and Rosenberger F., 1979, Convective instabilities in a closed vertical cylinder heated from below. Part.1 Monocomponent gases, J. Fluid Mech., 92, 609.

Ostroumov G.A., 1952, Free convection under the conditions of the internal problem, Tech. Theor. Lit. Moscow - Leningrad state publishing House Engl. Trans. NACA-TM 1407 :

Verhoeven J.D., 1969, Experimental study of thermal convection in a vertical cylinder of mercury heated from below, Phys. of Fluids 12, 1733.

Veronis G., 1963, Penetrative Convection, Astrophys. Journal 137, 641.

ACKNOWLEDGEMENT

We gratefully acknowledge Yves Pomeau who introduced us to the problem of the time-dependent convection and for stimulating discussions and Paul Manneville for his criticism in revising the manuscript.

We are also indebted to Jean-Paul Grenet for the skilfull construction of the apparatus and for his drawings.

TABLE CAPTION

Table 1 : The critical Rayleigh numbers $Ra_c^{(n)}$ and the predicted radial mode i are tabulated for the angular modes n = 0, 1 and 2 and for aspect ratio from 0.1 to 10.

a) Insulating sidewalls, b) Conducting sidewalls.

* denotes that we have reported the critical values of Ra^* instead of Ra.

Table 1-a

aspect ratio	i	$Ra_c^{(o)}$	i	$Ra_c^{(1)}$	i	$Ra_c^{(2)}$
*0.100	5	2192	5	2037	5	1977
*0.125	4	2196	4	2037	4	1993
*0.150	3	2167	3	2081	3	1977
*0.200	2	2144	3	2119	2	2020
0.6	1	1587	1	2126	1	2380
0.8	1	930.6	1	867.9	1	1374
1	1	700.9	1	524.7	1	1035
1.2	1	588.3	1	389.1	1	872.1
1.6	1	477.5	1	281.4	1	713.5
2	1	423.3	1	236.4	1	636.8
3	1	366.1	1	190.5	1	557.9
4	1	345.3	1	173.6	1	530.0
5	1	335.6	1	165.8	1	517.4
10	1	322.7	1	155.9	1	501.2

Table 1-b

aspect ratio	i	$Ra_c^{(o)}$	i	$Ra_c^{(1)}$	i	$Ra_c^{(2)}$
*0.1	5	2075	5	1946	5	1890
*0.125	4	2057	4	1931	4	1890
*0.15	3	2020	3	1971	3	1868
*0.2	2	1982	3	1959	2	1889
0.6	1	1432	1	1272	1	1454
0.8	1	853.7	1	437.3	1	766.5
1	1	652.7	1	234.8	1	548.6
1.2	1	553.8	1	160.7	1	448.9
1.6	1	455.4	1	106.2	1	355.6
2	1	407.4	1	85.19	1	311.1
3	1	357.8	1	64.71	1	264.3
4	1	340.2	1	56.99	1	247.4
5	1	332.2	1	53.29	1	239.7
10	1	321.8	1	48.36	1	229.5

FIGURE CAPTIONS

Figure 1 : Experimental apparatus

Figure 2 : Angular temperature distribution around the mid-height cross section of the cylinder, in the steady regime.
a) h = 3 cm, $\bar{\Theta}$ = 2,51°C, A_1 = 0,24 °C, A_2 = 0,71 °C
b) h = 4 cm, $\bar{\Theta}$ = 2.45°C, A_1 = 0,73 °C, A_2 = 0,1°C

Figure 3 : Temperature variation at the location of the thermocouples a) h = 8 cm, b) h = 9 cm.

Figure 4 : Angular temperature distribution in the unsteady regime a) h = 8 cm, b) h = 9 cm. In each cases the curve (1) and (2) have been drawn at an hour interval.

Figure 5 : Time evolution of the nodal planes.
a) h = 8 cm, A : $t = t_o$, B : $t = t_o$ + 30 mn, C : $t = t_o$ + 75 mn, D : $t = t_o$ + 120 mn, E : $t = t_o$ + 165 mn, A : $t = t_o$ + 192 mn.
b) h = 9 cm, A : $t = t_o$, B : $t = t_o$ + 60 mn, C : $t = t_o$ + 150 mn, D : $t = t_o$ + 210 mn, E : $t = t_o$ + 225 mn, A : $t = t_o$ + 266 mn
c) Nodal planes for the pure modes n = 1 and n = 2.

Figure 6 : Critical Rayleigh numbers plotted against the aspect ratio λ. For $\lambda < 0.5$, expression Ra_c^* has been used instead of Ra_c for $\lambda > 0.5$, this explains the peak at the matching value $\lambda = 0.5$.

Figure 7 : Vertical velocity profiles for various aspect ratios when n = 2 and $\mathcal{B}$ = 10.

Figure 8 : Schematic picture of the vertical flow patterns in a vertical cylinder.

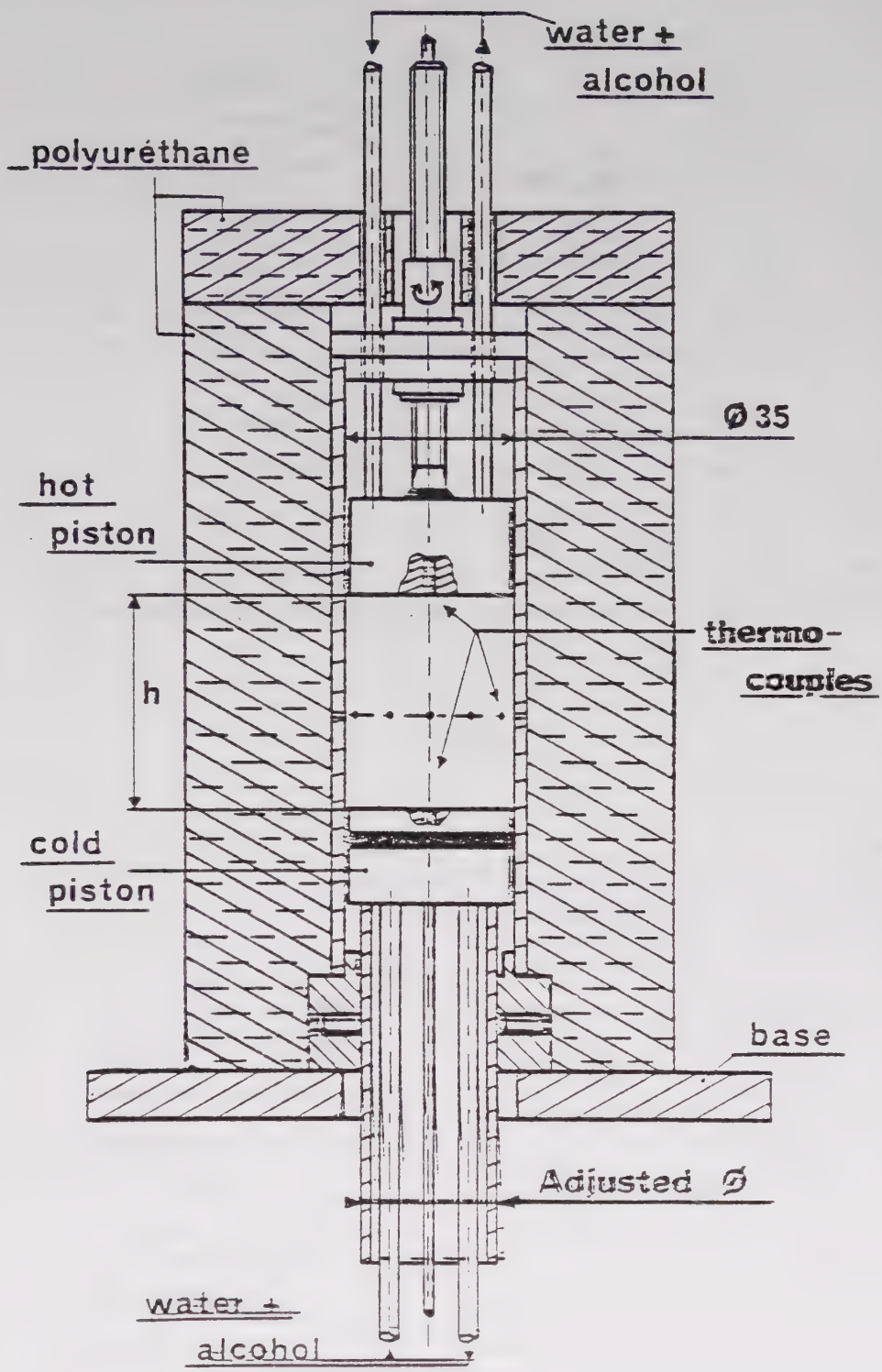

water +
alcohol
polyuréthane
Ø 35
hot
piston
h
thermo-
couples
cold
piston
base
Adjusted Ø
water +
alcohol

Fig.

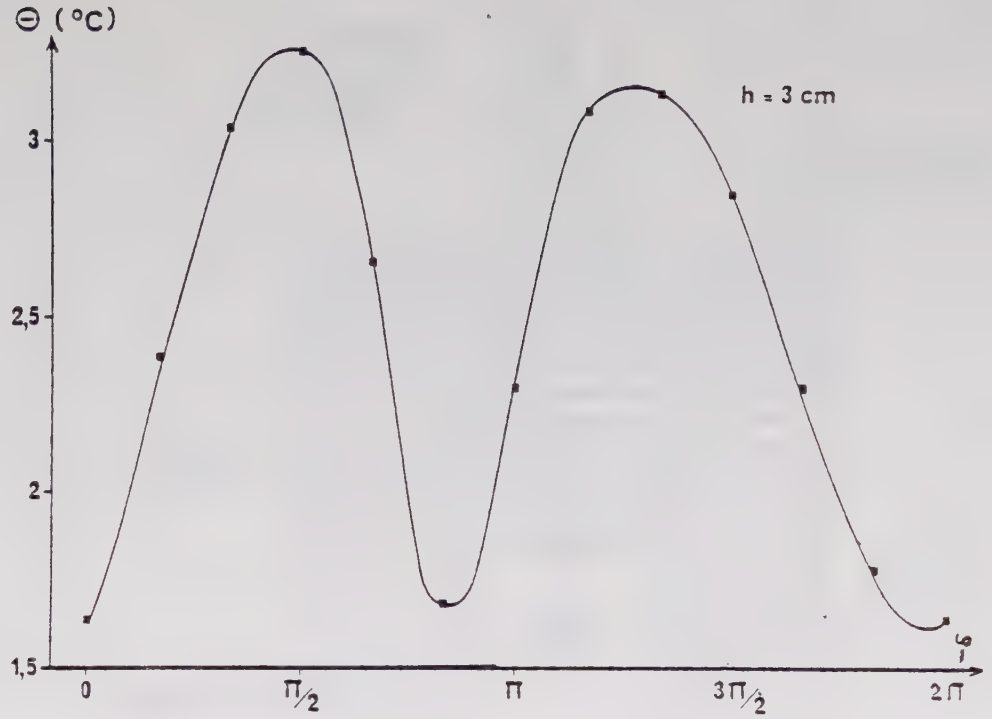


Fig. 2a

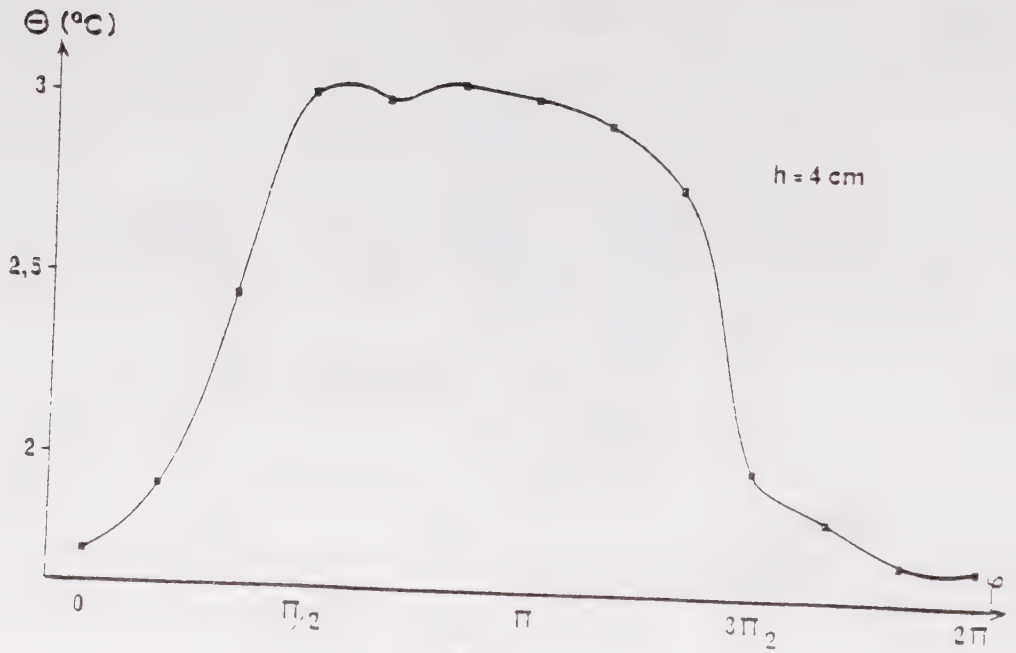


Fig. 2b

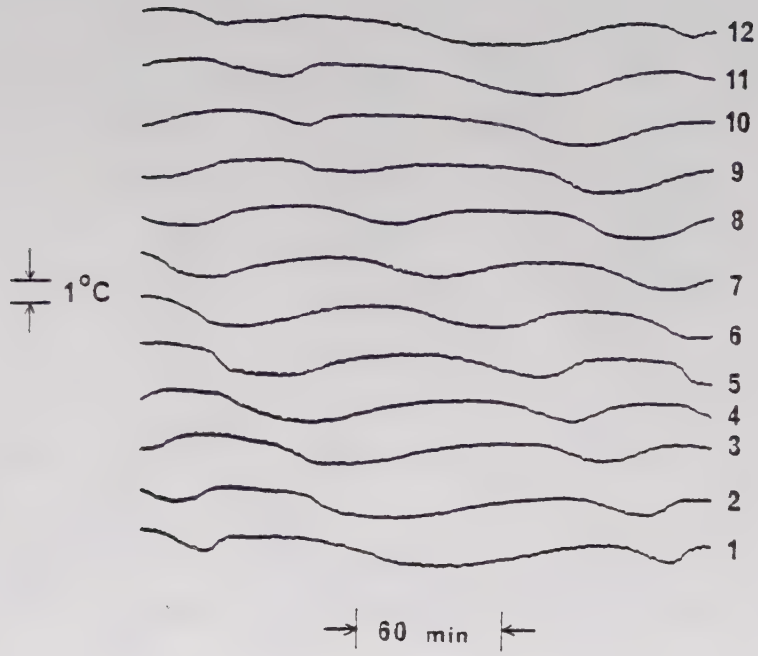


Fig. 3a

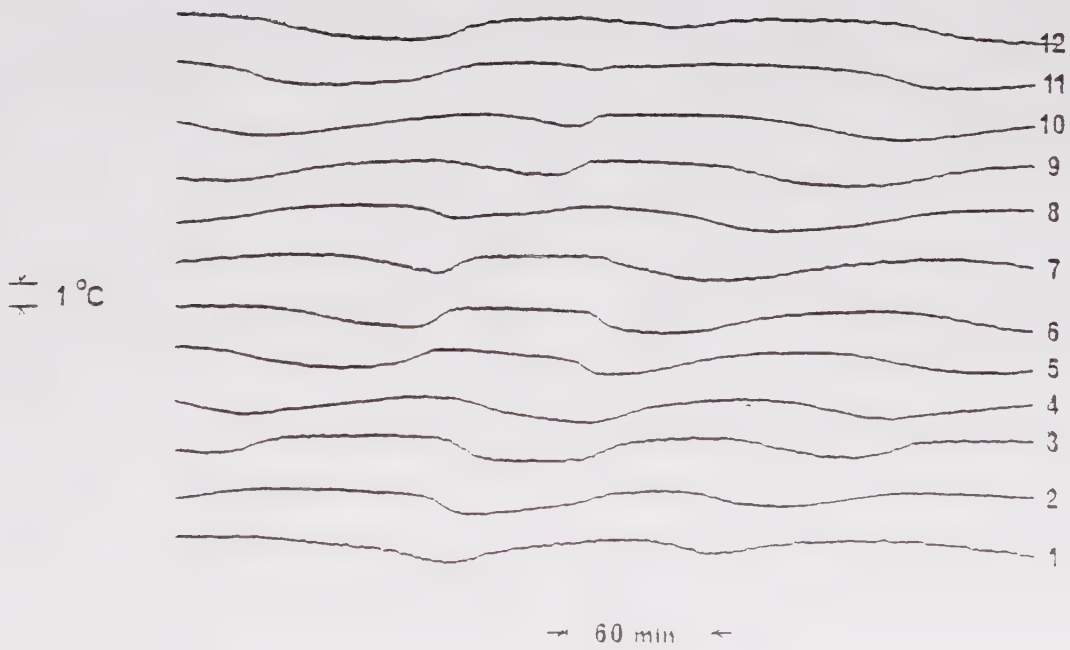


Fig. 3b

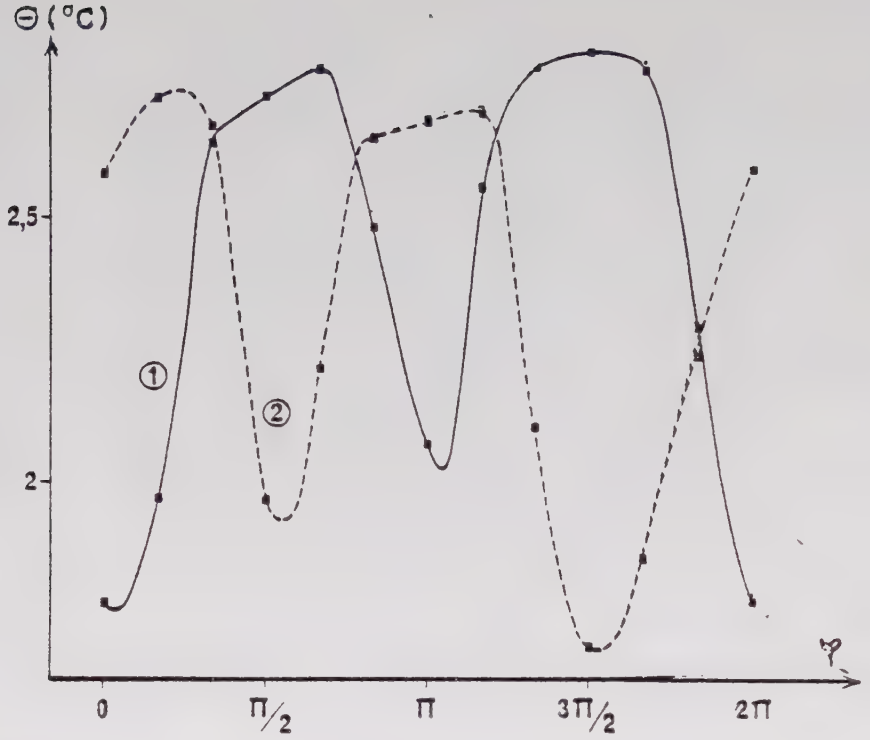


Fig. 4a

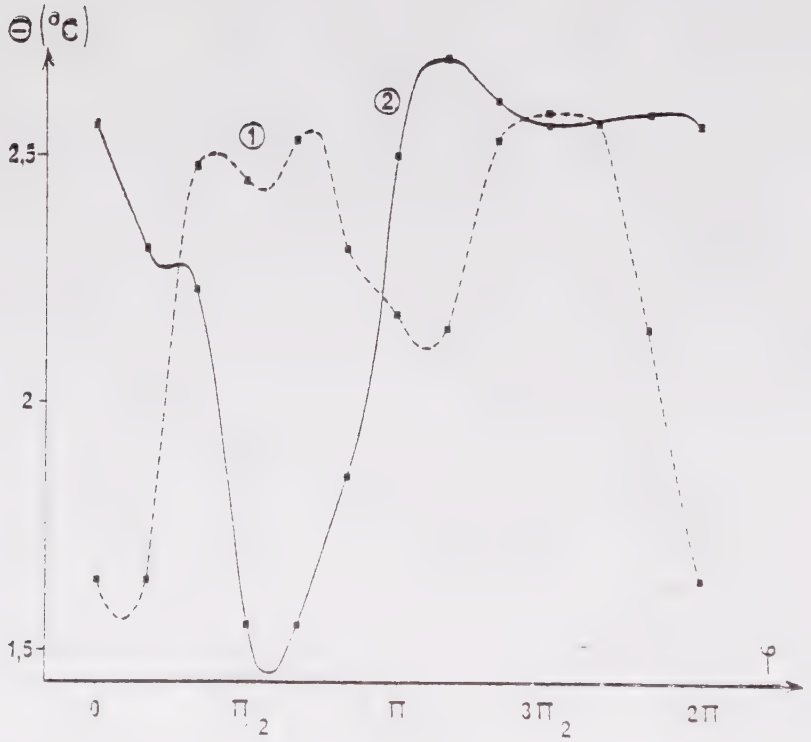


Fig. 4b

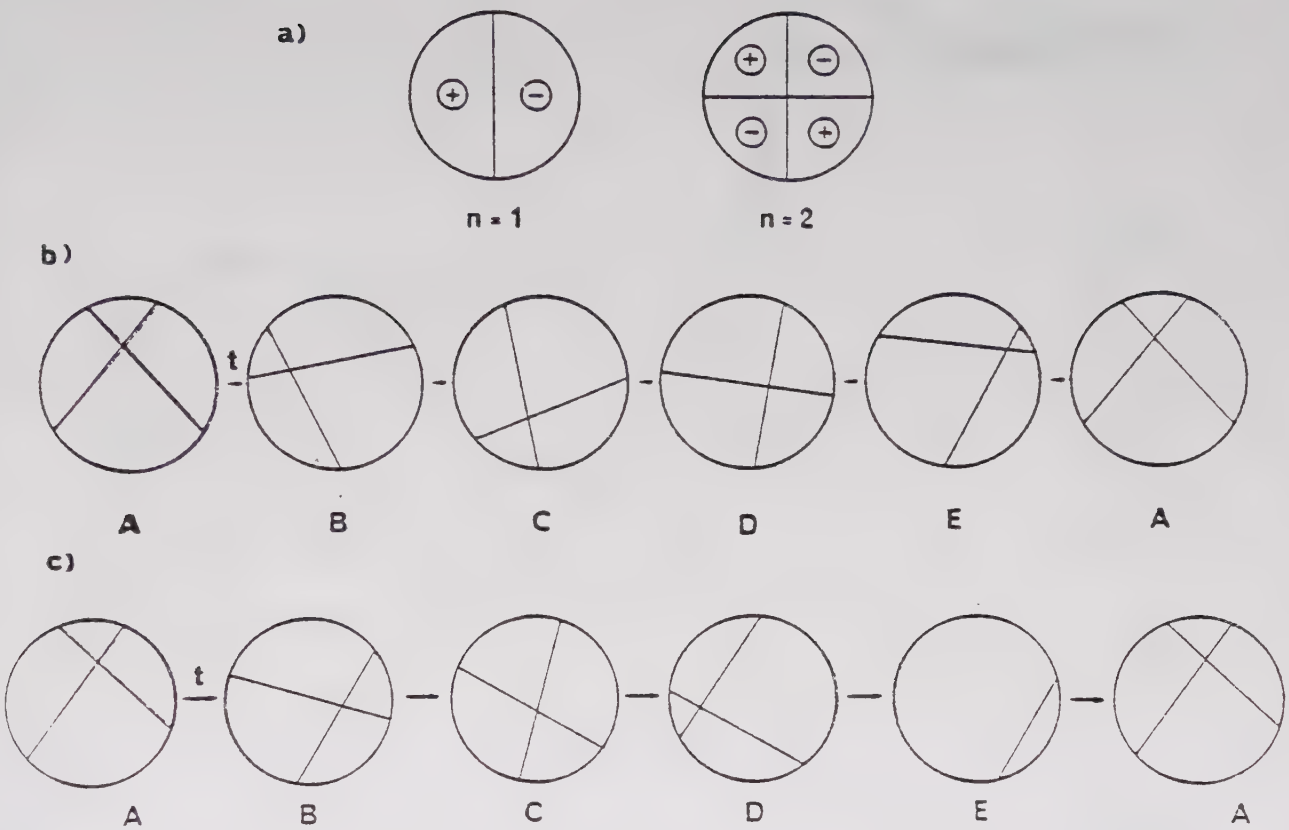


Fig. 5

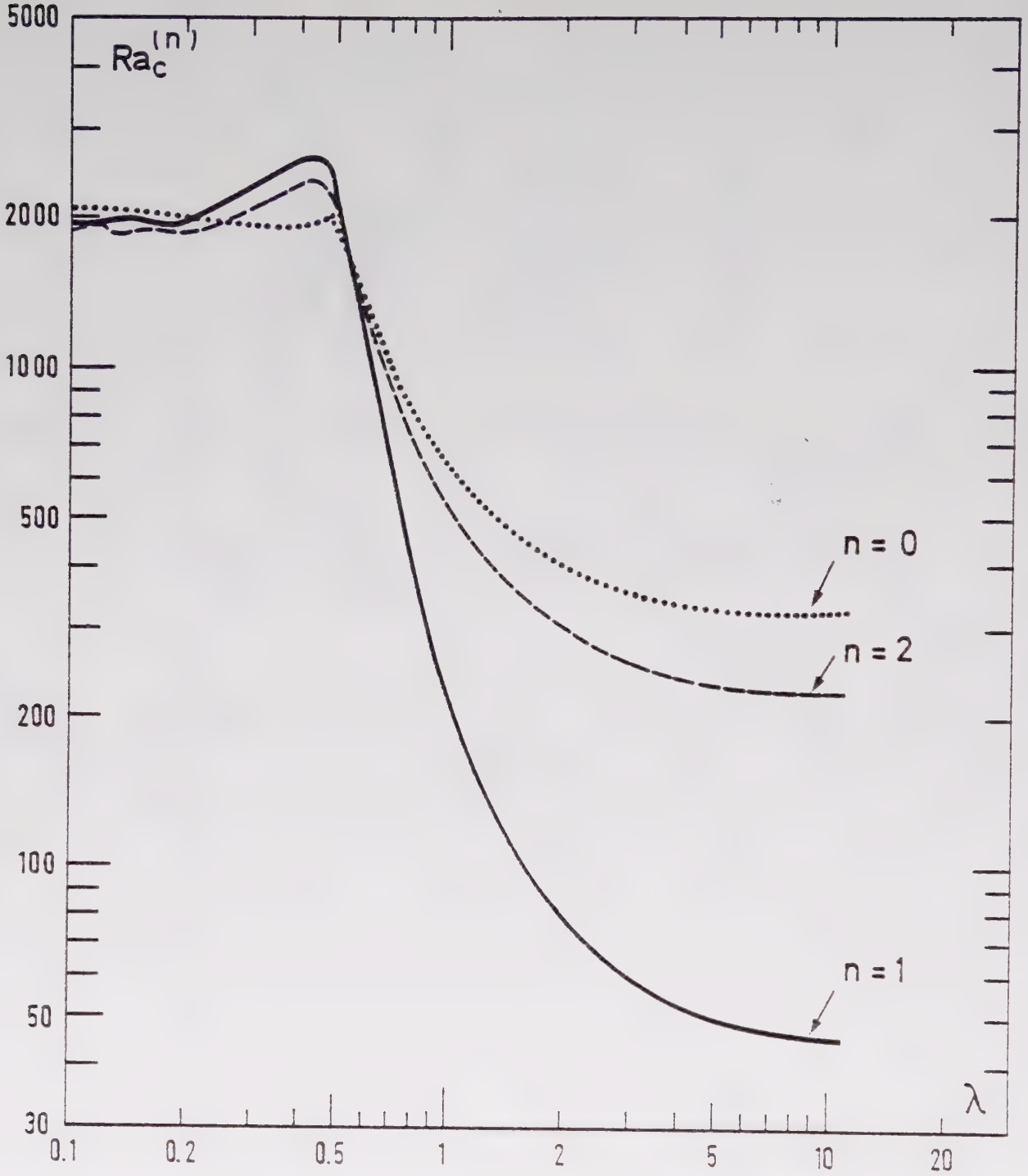


Figure 6

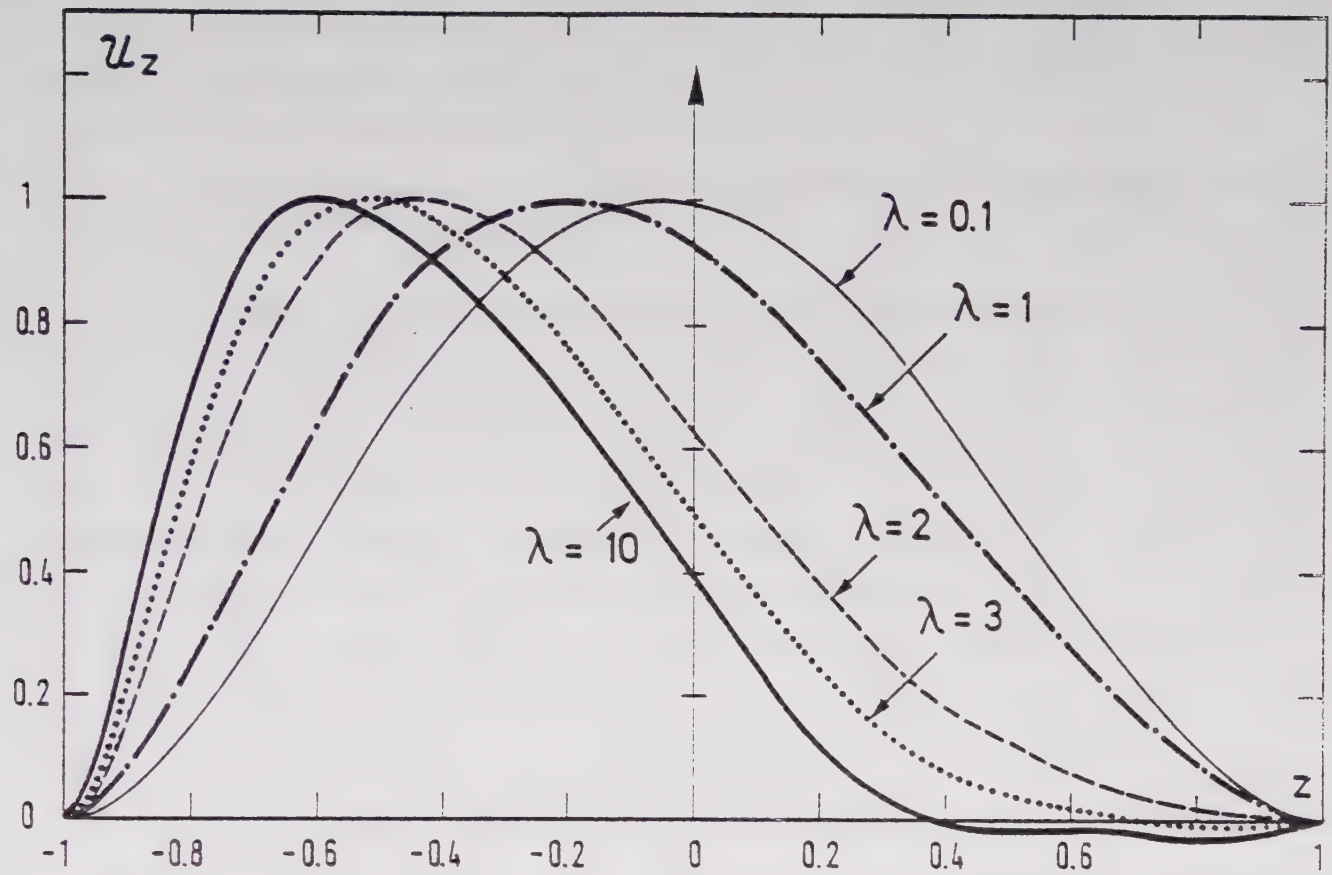


Figure 7

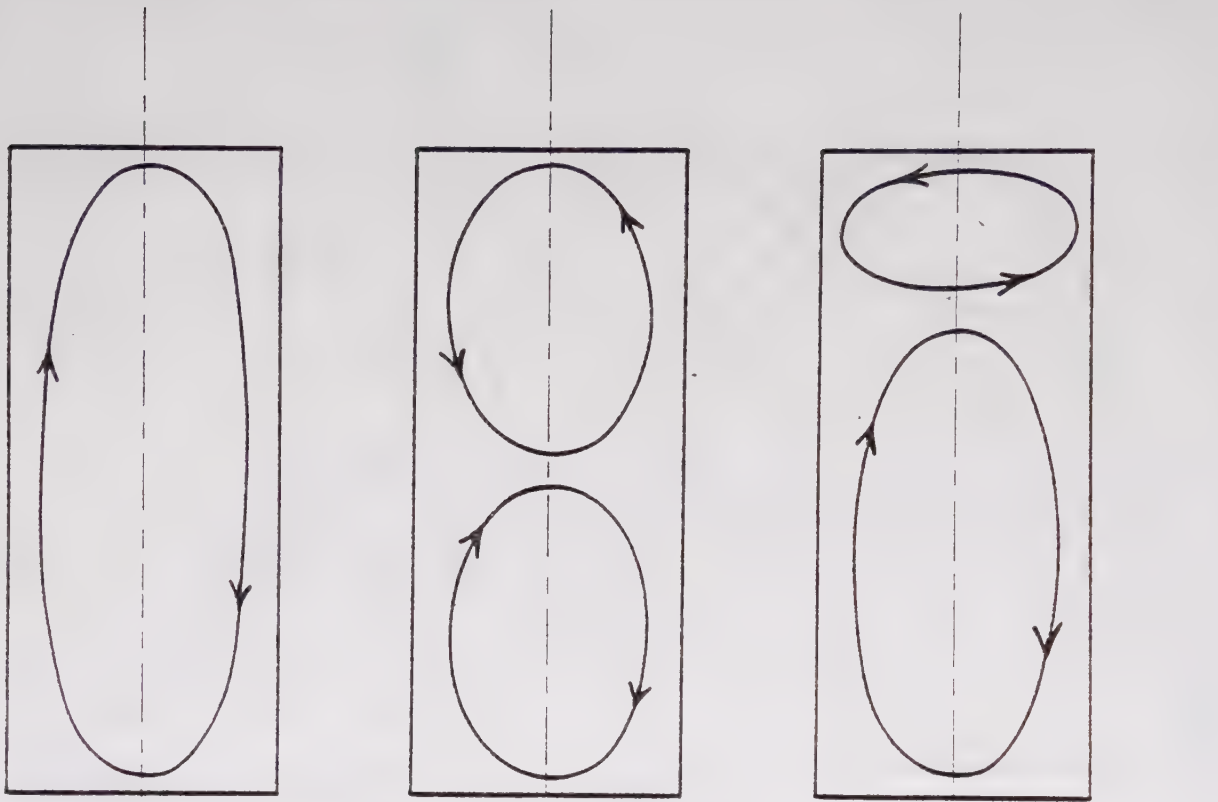

even solutions
odd solutions
water between
0 and 4°C
ordinary liquids

Figure 8

V. LA CONVECTION EN GEOMETRIE RECTANGULAIRE

1. La convection dans les boîtes de grandes dimensions horizontales

La première étude théorique sur la convection dans les boîtes rectangulaires de grande extension horizontale remonte seulement à 1967. C'est une analyse linéaire due à Davis[44] qui utilise la méthode de Galerkin pour déterminer les nombres de Rayleigh et les configurations associées au seuil d'instabilité marginale. Contrairement à ce que l'on observe en géométrie cylindrique, le choix de conditions aux limites horizontales "libres" n'apporte pas de simplifications majeures dans le cas de la géométrie parallélépipédique, ce qui expliquerait l'apparition tardive de travaux en géométrie rectangulaire.

Dans l'article de Davis les dimensions horizontales de la boîte h_1 et h_2 sont telles que les rapports d'aspect $\frac{h_{1,2}}{d}$ prennent des valeurs entre 1/4 et 6, d étant la hauteur de la boîte. Les fonctions d'essai utilisées par Davis sont des polynômes dans les trois variables d'espace x,y et z et de plus l'hypothèse est faite que les fonctions d'essai pour l'une des composantes de la vitesse s'annulent en (K-1) points du domaine $\left\{x, |x| < \frac{1}{2} h_1\right\}$. Cette contrainte permet de fixer arbitrairement le nombre de rouleaux d'axe parallèle à Oy. Les calculs de Davis ont été améliorés récemment par Bühler, Kirchartz et Oertel[45]. L'aspect non linéaire du problème a été étudié par Segel[46]. Son idée est qu'il est encore possible de décrire la convection dans une boîte rectangulaire en terme de rouleaux bidimensionnels à condition d'introduire des variations spatiales de grande échelle de façon à pouvoir accomoder les conditions aux limites latérales. La composante v_z de la vitesse s'écrit alors :

$$v_z = A(X,Y,\tau)\sin ax \sin \pi z$$

où X, Y et τ sont des variables lentes dans l'espace et le temps. Segel montre que l'enveloppe des rouleaux $A(X,Y,\tau)$ satisfait une équation aux dérivées partielles non linéaire. Les conditions aux limites qu'il lui associe ont été controversées plus tard par Brown et Stewartson[47]. Au même moment et indépendamment de Segel, Newell et Whitehead[48] ont aussi décrit la modulation d'amplitude résultant de la présence des parois.

La validité des calculs que nous avons cités repose sur l'hypothèse que ce sont toujours des rouleaux d'axe parallèle aux bords du rectangle qui

apparaissent au seuil de l'instabilité. C'est effectivement le cas lorsque l'un des bords du rectangle est nettement plus grand que l'autre, mais le plus souvent ce sont des rouleaux irréguliers qui apparaissent. On trouvera par exemple dans la thèse de M. Dubois[49] une configuration qui n'est pas rigoureusement constituée de rouleaux parallèles à l'un des bords. La structure qu'elle observe pour un nombre de Rayleigh égal à un peu moins de deux fois le nombre de Rayleigh critique est schématisée dans la Fig. 1. L'écoulement est encore en grande partie constitué de rouleaux parallèles au petit côté de la cellule et les déformations de ce système de rouleaux principal sont limitées au voisinage des bords de plus petite dimension où l'on observe un second système de rouleaux d'axe orthogonal à celui du système principal. Pour des nombres de Rayleigh un peu plus élevés, $Ra \simeq 3\ Ra_c$ et dans une boîte presque carrée, R. Krishnamurti[50] observe des rouleaux encore plus déformés (Fig. 2). Lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une certaine valeur Ra_t les rouleaux commencent à se déplacer lentement et de façon désordonnée. Ainsi au désordre spatial s'ajoute un désordre temporel baptisé "turbulence de phase" pour rappeler son origine qui est reliée à la position et donc à la phase des rouleaux. Ahlers[51] a montré que le seuil d'instationnarité Ra_t pouvait même dans certains cas être confondu avec le seuil de l'instabilité convective Ra_c. La description des expériences d'Ahlers, effectuées en géométrie cylindrique, trouve sa place dans ce chapitre car elle va nous donner l'occasion de mettre en évidence l'influence de la taille du système sur le comportement convectif non stationnaire.

2. L'apparition de la turbulence dans les grandes boîtes

Trois cellules de tailles différentes ont été utilisées par Ahlers, elles sont caractérisées par un rapport d'aspect Γ défini comme le rapport du rayon sur la hauteur. Ces cellules sont remplies d'hélium liquide normal (non superfluide) dont le nombre de Prandtl varie beaucoup avec la température et qui dans ces expériences prend successivement les valeurs 0.8, 2.9 et 4.4. Dans la première cellule pour laquelle le rapport d'aspect vaut, 2,08, la turbulence apparait pour $Ra_t \simeq 11 Ra_c$ ce régime turbulent étant précédé d'un régime quasi-périodique pour $10\ Ra_c < Ra < Ra_t$. Dans la deuxième cellule, $\Gamma = 4.72$, on trouve $Ra_t = 2\ Ra_c$ et dans la troisième cellule, $\Gamma = 57$, la turbulence apparaît dès le seuil d'apparition de la convection, $Ra_t \simeq Ra_c$. Des mesures de la différence de température verticale ΔT sont effectuées au cours du temps et l'intensité spectrale $P(\omega)$ est calculée en fonction de la fréquence ω. On définit

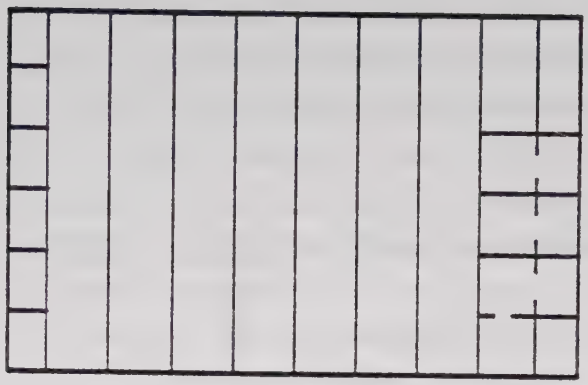


Figure 1

Schéma d'une configuration stationnaire observée par M. Dubois[49], $Ra = 1.9\ Ra_c$, section horizontale 6 × 10 cm, d = 0.45 cm. Les lignes que nous avons tracé représentent les zones lumineuses d'une photographie obtenue par effet de focalisation.

Figure 2

Configurations stationnaires d'après Krishnamurti[50], P = 860 section horizontale 40 × 51 cm.

a) La direction priviligiée pour l'axe des rouleaux est Oy, $Ra = 2.7\ Ra_c$.

b) La direction priviligiée est cette fois Ox, $Ra = 9\ Ra_c$.

une fréquence caractéristique ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{\int |\omega| P(\omega) d\omega}{\int P(\omega) d\omega}$$

Le résultat le plus frappant concernant ω_1 est sa très faible valeur, deux ordres de grandeur plus basse que la fréquence de l'instabilité oscillatoire de Clever et Busse. Ainsi, le phénomène que l'on observe évolue sur une échelle de temps caractéristique très longue, ce qui expliquerait en partie la raison pour laquelle il n'a pas été découvert plus tôt. L'autre résultat important concerne la décroissance du spectre, c'est à dire la partie du spectre se rapportant aux fréquences $\omega \gg \omega_1$, dont le comportement présente les caractéristiques d'une loi de puissance :

$$P(\omega) = \omega^{-n} \quad \text{avec} \quad n = 4 \pm 0.2$$

Des conjectures ont été émises sur l'origine de ce bruit de basse-fréquence. Elles sont dues à Y. Pomeau et P. Manneville[52,53] qui proposent de relier l'apparition de la turbulence dans les grandes boîtes au problème de la sélection du nombre d'onde. Leurs résultats proviennent de la résolution de deux équations modèles :

$$u_t = \Omega u - u^3 \qquad (1a)$$

$$u_t = \Omega u - u u_x \qquad (1b)$$

qui décrivent chacune l'évolution d'une grandeur convective représentée par u, fonction du temps t et d'une seule variable d'espace x. Ω est un opérateur différentiel linéaire :

$$\Omega \equiv \varepsilon - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_c^2 \right)^2 \quad , \qquad (2)$$

où ε mesure l'écart au nombre de Rayleigh critique et a_c est le nombre d'onde critique. Les équations (1a,b) sont résolues avec les conditions aux limites :

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{en} \qquad x = 0 \text{ et } L$$

L'intégration numérique de (1a,b) a pu être réalisée sur des intervalles de temps très longs et pour des boîtes contenant de 50 à 80 rouleaux. Dans chaque cas on trouve que le nombre d'onde a sélectionné est unique avec $a < a_o$. Ce résultat constitue une justification a posteriori du choix des équations (1a,b) qui s'avèrent donc capables de reproduire le phénomène bien connu des expérimentateurs : l'accroissement de la longueur d'onde. De plus les calculs montrent que le nombre d'onde sélectionné se trouve situé dans le plan (Ra,a) à l'intérieur d'une région instable vis à vis de perturbations du type "zig-zag". Rappelons que les perturbations de type "zig-zag" sont des déplacements de faible amplitude et de grande longueur d'onde, perpendiculaires à l'axe des rouleaux. Soit L_y la dimension de la cellule mesurée parallèlement à l'axe des rouleaux. Lorsque L_y n'est pas trop grand, la turbulence qui résulte de petites distorsions des rouleaux, n'apporte pas de profonds changements de la structure globale. Par contre lorsque L_y est très grand des fluctuations angulaires survenant indépendamment en différents points de la structure peuvent promouvoir la création de défauts topologiques ayant eux-mêmes leur propre dynamique.

Un autre mécanisme conduisant à la turbulence a été proposé par Y. Pomeau et P. Manneville[54] récemment. Il se rapporte plus précisément au cas des structures axisymétriques dans les cellules cylindriques. Leur calcul montre que loin du centre de symétrie le nombre d'onde de la structure est déterminé de manière unique et se trouve en contradiction avec le nombre d'onde sélectionné par la présence des bords. La frustration du système qui en résulte pourrait se manifester par des bouffées de turbulence au cours desquelles on assisterait à un brutal réarrangement de la structure avec naissance ou disparition d'un rouleau près du centre ou des bords. Ces périodes de remaniement seraient séparées par de longues périodes plus calmes au cours desquelles la phase des rouleaux diffuserait lentement entre le centre et les bords. Le type de bruit correspondant à ce phénomène dépendant du temps possède la particularité de se comporter aux fréquences élevées, ω, comme ω^{-4}, ce qui est à rapprocher des résultats expérimentaux cités plus haut.

3. Structures convectives stationnaires

Notre contribution à l'étude de la convection dans les boîtes de grande extension horizontale se limitera à l'aspect linéaire et stationnaire du problème. Rappelons que les modèles théoriques cités plus haut se rapportent toujours

à des systèmes unidimensionels avec une seule coordonnée d'espace horizontale, x, et que la dépendance par rapport à la coordonnée verticale, z, est triviale lorsqu'on choisit des conditions aux limites horizontales "libres" ce qui est aussi toujours le cas. Des progrès doivent être faits pour améliorer ces modèles et les rendre plus réalistes. Deux voies s'offrent alors à nous, l'une d'elles consiste à raffiner les modèles unidimensionels en tenant compte de conditions aux limites "rigides" et de termes non linéaires plus réalistes, l'autre consiste à rendre le problème bidimensionel. C'est la seconde orientation que nous allons suivre dans le travail présenté ici. Toutefois dans l'état actuel des connaissances la solution du problème bidimensionel non linéaire et dépendant du temps paraît hors d'atteinte. Dans un premier temps nous nous sommes fixés le but de résoudre le problème de la recherche des modes stationnaires qui apparaissent au seuil de l'instabilité convective dans une cavité rectangulaire. En limitant le domaine d'application de notre étude au voisinage du seuil convectif, on peut éliminer les termes non linéaires figurant dans les équations générales de la convection. Les modes convectifs que nous allons déterminer se destabilisent pour des valeurs du nombre de Rayleigh, $Ra^{(1)}$, $Ra^{(2)}$...$Ra^{(n)}$. Nous définirons un petit paramètre λ :

$$\lambda \equiv Ra^{(n)} - Ra_c^{\infty}$$

qui mesure l'écart du nombre de Rayleigh critique de chacun des modes n au nombre de Rayleigh critique Ra_c^{∞} de la couche plane infinie. En développant les équations d'Oberbeck-Boussinesq linéarisées par rapport à ce petit paramètre λ et en prenant des conditions aux limites "libres" sur les parois horizontales, on arrive à déduire une équation simplifiée pour la dépendance horizontale w de la composante verticale de la vitesse, soit :

$$\mathscr{L}^2 w = \frac{\lambda}{9} w \quad , \tag{3}$$

avec

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{à} \qquad x = \pm L \quad , \tag{4a}$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad \text{à} \qquad y = \pm M \quad , \tag{4b}$$

2L et 2M étant les deux dimensions horizontales de la boîte rectangulaire, rapportées à l'unité de longueur prise égale à la hauteur de la boîte. L'opérateur $\mathscr{L}^2$ n'est autre que la généralisation à deux dimensions de l'opérateur $\Omega(2)$ de Pomeau-Manneville, avec :

$$\mathscr{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + q_o^2$$

En théorie de l'élasticité, lorsqu'on s'intéresse à la flexion forte des plaques minces encastrées[55], on rencontre aussi des équations du type (3) avec contraintes (4a,b). Malgré sa simplicité formelle l'équation (3) avec conditions aux limites (4a,b) n'en demeure pas moins insoluble par les méthodes traditionnelles, sauf dans le cas unidimensionel ou le cas axisymétrique. Nous avons donc eu recours à une méthode numérique qui consiste à remplacer l'équation aux dérivées partielles (3) par une équation aux différences finies. Pour cela nous devrons d'abord remplacer l'ensemble continu de points $\{x,y,\ |x| \leq L,\ |y| \leq M\}$ par un ensemble discret de points régulièrement répartis sur un réseau carré (Fig. 3). L'équation (3) possède des propriétés évidentes de symétrie par rapport aux axes de symétrie du rectangle Ox et Oy et pour cette raison nous resteindrons le domaine de résolution au quadrant supérieur droit. Dans ce quadrant les points du réseau sont numérotés de 1 à $N = N_1 \times N_2$ où N_1 est le nombre de points du réseau sur le demi-axe Oy et N_2 le nombre de points du réseau sur le demi-axe Oy. Dans l'équation (3) les dérivées, sont remplacées par des différences finies conformément aux formules que l'on trouvera dans l'Appendice B du chapitre VI . L'équation (3) est remplacée par un système de N équations linéaires :

$$A_{rs}\ w_r = \frac{\lambda}{9}\ w_r \qquad r,s = 1,\ldots,N \qquad (5)$$

La structure de la matrice A dont les coefficients dépendent du pas du réseau, est représentée sur la Fig. 4. Cette matrice est symétrique et le problème aux valeurs propres (4) est résolu numériquement, la dimension de la matrice étant proche de 400×400. Les résultats concernant les valeurs propres λ, c'est à dire les nombres de Rayleigh critiques des modes convectifs et les configurations associées c'est à dire la valeur de la fonction w aux points $r = 1,\ldots,N$, sont présentés au chapitre VI . Nos calculs montrent qu'il existe des modes excités formés pour l'essentiel de rouleaux d'axe parallèle au petit côté du

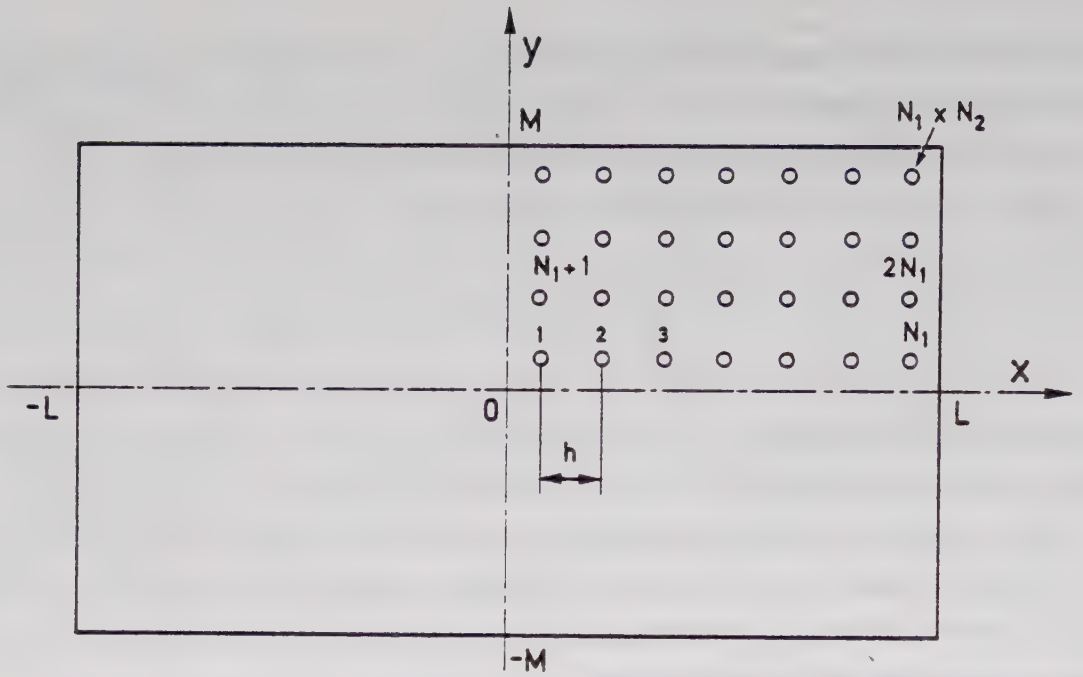


Figure 3

Section horizontale de la boîte rectangulaire de longueur 2L et largeur 2M. Le quadrant supérieur droit est représenté par un réseau de points distants de h et numérotés de 1 à $N_1 \times N_2$.

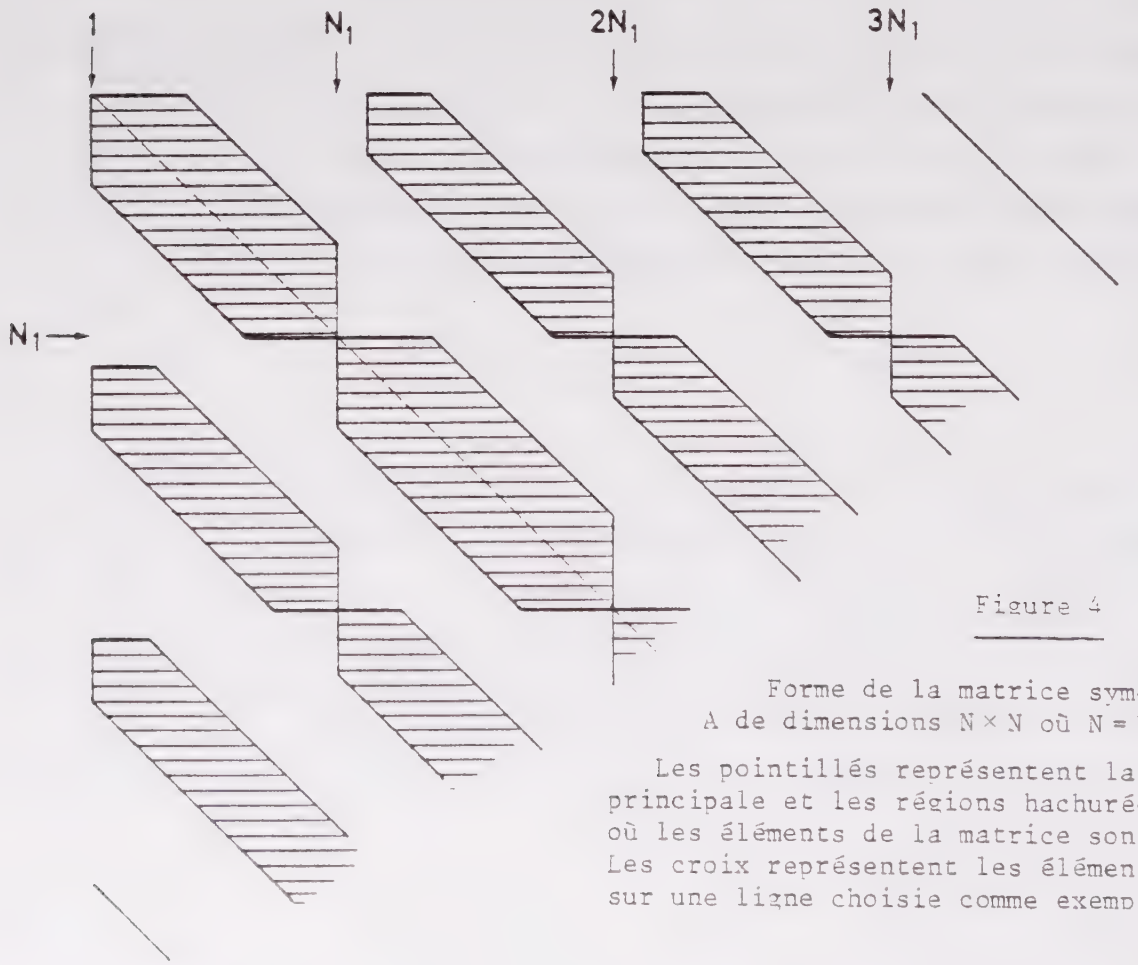


Figure 4

Forme de la matrice symétrique A de dimensions $N \times N$ où $N = N_1 \times N_2$.

Les pointillés représentent la diagonale principale et les régions hachurées sont celles où les éléments de la matrice sont non nuls. Les croix représentent les éléments non nuls sur une ligne choisie comme exemple.

rectangle mais qui présentent des défauts du type dislocation (Fig. 5, 6 du chapitre VII).Ces configurations qui possèdent encore une grande régularité spatiale ne reproduisent pas les résultats expérimentaux présentés dans les figures 1 et 2 de ce chapitre et qui relèvent d'une analyse non-linéaire. Toutefois des configurations assez voisines ont été observées dans d'autres types d'instabilités. C'est le cas des nématiques homéotropes soumis à un cisaillement elliptique pour lesquels E. Guazzelli a observé selon les conditions expérimentales, soit la nucléation d'une paire de dislocations coin[56], soit des dislocations isolées[58],[59] dans une structure périodique composée d'environ 200 rouleaux. Le même genre de défauts a également était observé dans l'instabilité de Couette[61].

Chapitre VI

Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)
Vol. 32, 1981

0044-2275/81/0032/0081/$ 4.70/0
© Birkhäuser Verlag Basel, 1981

Convective flow patterns in rectangular boxes of finite extent

By Christiane Normand, Commissariat à l'énergie atomique,
Service de physique théorique, Centre d'études nucléaires de Saclay,
Gif-sur-Yvette, France

Experimentally convection always takes place in three dimensional boxes and the shape of the frame which confines laterally the fluid exerts an influence on the geometrical properties of the convective motion [1, 2].

The first theoretical results for convective flow in rectangular boxes have been derived by Davis [3] using a Galerkin analysis of the linearized equations of convection. The spatial amplitude modulation which results from lateral boundary conditions has been described by Segel [4]. More recently Brown and Stewartson [5] investigated how orthogonal rolls interact and derived the boundary conditions which the modulated amplitude must satisfy at the sidewalls. When the sidewalls are not quite perfectly insulated, Daniels [6] and Hall and Walton [7, 8] have shown that the bifurcation at the critical Rayleigh number is replaced by a smooth transition. In the following discussion, we use some of the ideas and methods of Daniels [6, 9] and Drazin [10].

The purpose of this work is to gain insight into the convective pattern selection in a rectangular box. We present the numerical solutions of a model equation which asymptotically fits the following governing equation for the vertical convective velocity [10] u_z, i.e.:

$$(\Delta^3 - \mathrm{Ra}\,\Delta_2)\,u_z = 0 \tag{1}$$

where Ra is the Rayleigh number and Δ_2 the bidimensional horizontal Laplacian $\left(\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$.

Since we want to focus our attention on the horizontal modes of flow, and in order to simplify the formulation we assume a free upper as well as a free lower boundary condition. Without this assumption our method would become quickly untractable and one expects that our concluding remarks be not qualitatively greatly modified in the rigid-rigid case. Thus, we consider solutions of (1) of the form:

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) \sin n\pi z\,, \tag{2}$$

and we restrict ourselves to $n = 1$. It is convenient to introduce the operator:

$$\mathcal{L} \equiv \Delta_2 + a_0^2 ,$$

where $a_0^2 = \frac{\pi^2}{2}$ is the critical wavenumber for the unbounded layer. Using, the above notation and after inserting (2) into (1), one obtains:

$$[\mathcal{L}^2 (\mathcal{L} - 9\, a_0^2) + (\mathrm{Ra}_c^\infty - \mathrm{Ra})\, (\mathcal{L} - a_0^2)]\, w = 0 , \tag{3}$$

where $\mathrm{Ra}_c^\infty = \frac{27\, \pi^4}{4}$ is the critical Rayleigh number for the unbounded layer.

When $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, Drazin has shown that the solutions of (3) for rigid and insulating sidewalls separate in even and odd functions of x. For instance one has for the even mode:

$$u_z = [A_1 \cos a_1\, x + A_2 \cos a_2\, x + A_3 \cosh |a_3|\, x)] \sin \pi\, z \tag{4a}$$

the horizontal velocity u_x and temperature θ being written

$$u_x = \pi \left(\frac{A_1}{a_1} \sin a_1\, x + \frac{A_2}{a_2} \sin a_2\, x + \frac{A_3}{a_3} \sinh |a_3|\, x \right) \cos \pi\, z \tag{4b}$$

$$\theta = \left(\frac{A_1}{(a_1^2 + \pi^2)} \cos a_1\, x + \frac{A_2}{(a_2^2 + \pi^2)} \cos a_2\, x - \frac{A_3}{(a_3^2 - \pi^2)} \cosh |a_3|\, x \right) \sin \pi\, z \tag{4c}$$

where the A_i are constants to be determined by the boundary conditions at $x = \pm L, 2\, L$ being the horizontal extent of the box, and the a_i are the three roots of the cubic equation:

$$(a_i^2)^3 + 6\, a_0^2\, (a_i^2)^2 - a_i^2\, (\lambda + 15\, a_0^4) + 8\, a_0^6 = 0 \tag{5}$$

with:

$$\lambda = \mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_c^\infty .$$

Daniels has looked at asymptotic solutions of (5) when $\lambda \ll 1$. If $\lambda = 0$ the three roots a_i^2 reduce to:

$$a_i^2 = a_0^2 , \qquad i = 1, 2$$

$$a_3^2 = -8\, a_0^2 .$$

When λ takes a small positive value they can be expanded as:

$$\begin{aligned} a_{1,2}^2 &= a_0^2 \pm \frac{\lambda^{1/2}}{3} + O(\lambda) \\ a_3^2 &= -8\, a_0^2 + \frac{9\, \pi^2}{4} + O(\lambda) . \end{aligned} \tag{6}$$

Assuming that $\lambda L^2 \sim 1$, the solutions of (3) in the one-dimensional (1-d) case are obtained provided that:

$$\lambda = \frac{9\,n^2\,\pi^4}{2\,L^2} + 0\left(\frac{1}{L^3}\right). \tag{7}$$

One gets a discrete spectrum where n is an integer ($n = 1, 2 \ldots$). Both odd and even modes give the same leading term in the expansion of λ in descending powers of L. They differ for the $O(L^{-3})$ term, a detailed analysis of which is discussed in the work of Daniels in the case of insulating sidewalls. For conducting sidewalls satisfaction of the boundary conditions:

$$u_x = u_z = \theta = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm L$$

yields our result:

$$\lambda = \frac{9\,n^2\,\pi^4}{2\,L^2} \pm \frac{\sqrt{2}\,n\,\pi^3}{L^3} \begin{matrix}\cos\chi \\ \sin\chi\end{matrix} \left\{ 5 \begin{matrix}\sin\chi \\ \cos\chi\end{matrix} \pm \sqrt{2} \begin{matrix}\cos\chi \\ \sin\chi\end{matrix} \right\}$$

where

$$\chi = \frac{n\,\pi}{2} + \frac{\pi\,L}{\sqrt{2}},$$

and the two possibilities correspond respectively to the even and odd solutions.

To extend Daniels' analysis to the bidimensional case $\left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ we shall do a further assumption. It consists in neglecting the term $\cosh |a_3|\, x$ in (4a). However, this hyperbolic term is only significant in a thin boundary layer near the sidewalls where it ensures the satisfaction of the boundary conditions. Thus the leading term:

$$w = A_1 \cos a_1\, x + A_2 \cos a_2\, x \tag{8}$$

with $a_{1,2}$ given in (6) is solution of the equation:

$$\mathscr{L}^2\, w = \frac{\lambda}{9}\, w. \tag{9}$$

This equation can be derived in another way: from a balance of the various terms in (3) we see that the operator $\mathscr{L}$ is of order $O(\lambda^{1/2})$. Thus to lowest order in λ the equation (3) reduces to (9). The aim of this paper is to solve (9) which can be written:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_0^2\right)^2 w = \frac{\lambda}{9}\, w, \tag{10}$$

subject to the boundary conditions:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm L$$
$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = \pm M,$$

where the thermal boundary condition has been dropped. It is shown in Appendice A that the relative error in doing so is $O(\lambda^{1/2})$ and is consistent with the accuracy of the truncated equation (9).

Due to the $2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ term, the equation (10) does not seem to be solvable by means of analytical methods with rectangular boundary conditions, the most commonly used in convection experiments, so that we looked at numericals solutions.

In what follows we shall replace, for numerical purpose, the partial differential equation (10) by a difference equation, a numerical solution of which being obtained using an implicit method. To attack such a problem we first overlay the rectangular region ($-L \leqq x \leqq L$, $-M \leqq y \leqq M$) with a square lattice having mesh length h. In this analysis we shall assume that the boundary cuts the lattice between two nodal points. We shall only consider the first quadrant defined by:

$$0 \leqq x \leqq L, \quad 0 \leqq y \leqq M,$$

since the solutions can be classified in symmetric or antisymmetric ones about the coordinate axis Ox and Oy, so that four cases are considered:

$$w(-x, y) = \varepsilon_x w(x, y)$$
$$w(x, -y) = \varepsilon_y w(x, y)$$

with

$$\varepsilon_x = \pm 1 \quad \text{and} \quad \varepsilon_y = \pm 1.$$

The next step in the derivation of the difference equation associated with the differential equation (10) is the selection of the difference schemes, this discussion has been reported in Appendix B.

Introducing the notations:

$$w_{nm} \equiv w\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)h, \left(m - \frac{1}{2}\right)h\right]$$

where $n = 1, \ldots N_1$ and $m = 1, \ldots N_2$, N_1 and N_2 being, respectively, the number of points on the intervals $[0, L]$ and $[0, M]$. The couple of indices (n, m) is reduced to a single index r ranging from 1 to $N = N_1 \times N_2$ by the formula:

$$r = m + (n-1)N_1.$$

With these notations (*B*-2) becomes a system of N simultaneous linear equations for the unknown values w_r which can be written using a matrix notation:

$$A_{rs}\, w_r = \frac{\lambda}{9}\, w_r \tag{11}$$

where A is a $N \times N$ matrix.

The eigenvalue problem is solved numerically since N is a large number. The boundary conditions have been taken into account as follows: when $A\,w$ involves a point which is located outside the boundary of the rectangle we put the coefficient associated to this point equal to zero. Therefore, the accuracy of the difference formula (11) which is $O(h^4)$ in the core of the rectangle fall to $O(h)$ near the sidewalls. When difference formulae accurate to $O(h^2)$ are used, for instance, three points formula for the one-dimensional Laplacian, it is possible to express the boundary conditions with the same accuracy [11], but in our case the calculation will be greatly enhanced because there is a large number of different configurations for an external point. As an example, $\Delta_2^2\, w_{ij}$ when $i = N_1$, $j = N_2$ involves eighteen external points which can be classified in ten distinct configurations. The boundary value problem is the more important when the lattice does not fit the boundary condition, e.g. square lattice with circular boundary conditions, but in our case it is a smaller problem, and hopefully the lowering of the accuracy at boundaries has not too drastic effect on our final conclusions.

Let us now discuss the results. We have selected five examples:

a) $N_1 = 19, \quad N_2 = 19, \quad a_0\, h = \dfrac{2\sqrt{2}\,\pi}{19}, \quad (N = 361)$

b) $N_1 = 13, \quad N_2 = 26, \quad a_0\, h = \dfrac{\pi}{4}, \quad (N = 338)$

c) $N_1 = 11, \quad N_2 = 33, \quad a_0\, h = \dfrac{\pi}{2}, \quad (N = 363)$

d) $N_1 = 10, \quad N_2 = 38, \quad a_0\, h = \dfrac{\pi}{4}, \quad (N = 380)$

e) $N_1 = 8, \quad N_2 = 48, \quad a_0\, h = \dfrac{\pi}{4}, \quad (N = 384)$.

Since the computational time required to solve the eigenvalue problem (11) grows exponentially with the dimension N of the matrix A, the number N of lattice points is limited to 400 to avoid excessively large computational time. The size of the rectangle can be varied by varying the mesh length h. It is known that the numerical solution converges toward the true solution when h goes to zero, hence the best accuracy will be reached for the smaller value of h. Three values of h have been used. When $a_0\, h = \dfrac{\pi}{2}$ (4 lattice points per wavelength) the results for the critical value of the Rayleigh

Table 1

Eigenvalues $\frac{\lambda^{(n)} h^4}{9}$ $(n = 1, \ldots 10)$ for the square $N_1 = N_2 = 19$. The symmetry of the corresponding eigenmodes is denoted by $\varepsilon_x = \pm 1$ and $\varepsilon_y = \pm 1$. The configuration with $+-$ is symmetrical about Ox and antisymmetrical about Oy. For a description of the configuration we refer to Fig. 1, a...j.

n	$\frac{\lambda^{(n)} h^4}{9}$	ε_x	ε_y	configuration
1	0.003928	+	−	Fig. 1 a
		−	+	
2	0.004122	−	−	Fig. 1 b
3	0.004128	+	+	Fig. 1 c
4	0.004722	+	+	Fig. 1 d
5	0.004981	+	+	Fig. 1 e
6	0.005206	+	−	Fig. 1 f
		−	+	
7	0.005806	−	−	Fig. 1 g
8	0.005858	+	−	Fig. 1 h
		−	+	
9	0.007936	−	−	Fig. 1 i
10	0.007950	+	+	Fig. 1 j

Table 2

Eigenvalues $\frac{\lambda^{(n)} h^4}{9}$ $(n = 1, \ldots 10)$ for the rectangle $N_1 = 13$, $N_2 = 26$. When the configurations of the eigenmodes consists in regular rolls, it has been characterized by two numbers, m is the number of lines of vanishing velocity w parallel to Ox, l is the number of lines of vanishing w parallel to Oy. In the other cases we refer to a figure.

n	$\frac{\lambda^{(n)} h^4}{9}$	ε_x	ε_y	configuration	m	l
1	0.00736	+	+	x-rolls	12	0
2	0.00790	−	+	x-rolls	11	0
3	0.00907	−	−	x-rolls	11	1
4	0.00951	+	−	x-rolls	12	1
5	0.01275	+	+	Fig. 2 a		
6	0.01319	−	+	Fig. 2 b		
7	0.01667	−	−	Fig. 2 c		
8	0.01689	+	−	Fig. 2 d		
9	0.01947	−	+	Fig. 2 e		
10	0.01976	+	+	Fig. 2 f		

number suffer from the inaccuracy discussed in detail in Appendix B, namely, the bottom values of the spectrum take unrealistic negative values. When the mesh length is such that $a_0 h = \frac{\pi}{4}$ (8 lattice points per wavelength) as in cases b, d, and e all the eigenvalues are positive; it is a fortiori also true in case a) where $a_0 h = \frac{2\sqrt{2}\pi}{19}$ ($\sim$ 13 lattice points per wavelength).

The eigenvalues for the square (a) are listed in Table 1 and the nodal lines (lines of vanishing velocity w) of the corresponding eigenfunctions are drawn on Fig. 1. Due to the symmetry of the square, the eigenvalues are degenerated, moreover the gap between two successive eigenvalues is very small. This suggests that in real experiments it will be difficult to stabilize a pure excited mode and therefore the comparison of Fig. 1 with the available experimental datas [2] is not straightforward.

The rectangular cases divide in two categories.

i) The medium size limit ($L a_0 \sim 10$ or $M a_0 \sim 10$) is well illustrated in case b). In the 1-d case, the largest terms omitted by considering the approximate solution (8) are of order $O(L^{-1})$, then we are not in the ideal case where our model equation the best apply, nevertheless our results are quite satisfactory. The four first eigenvalues (Table 2) are associated with con-

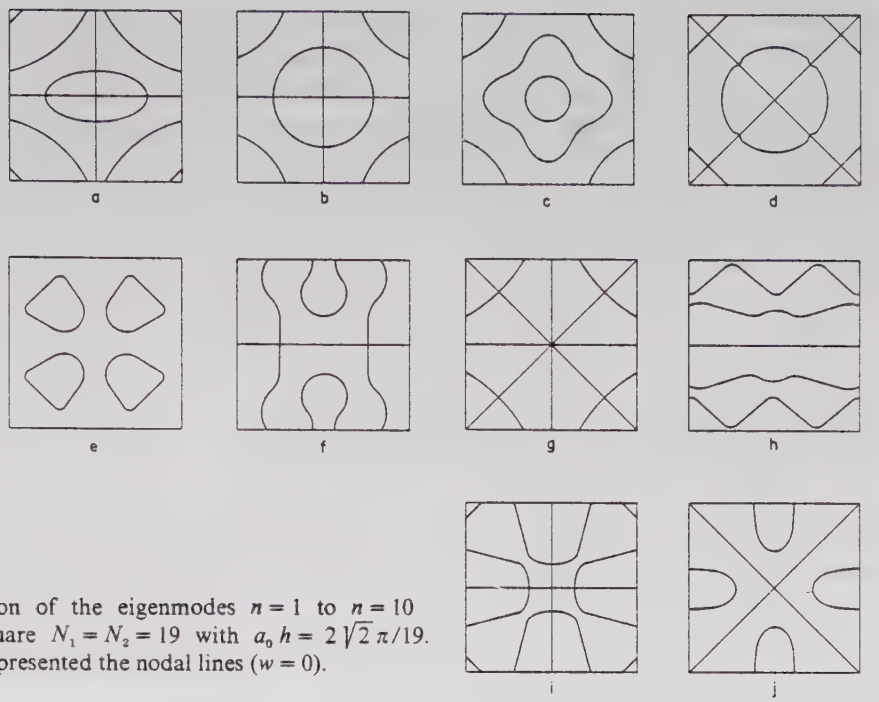


Figure 1
Configuration of the eigenmodes $n = 1$ to $n = 10$ for the square $N_1 = N_2 = 19$ with $a_0 h = 2\sqrt{2}\,\pi/19$. We have represented the nodal lines ($w = 0$).

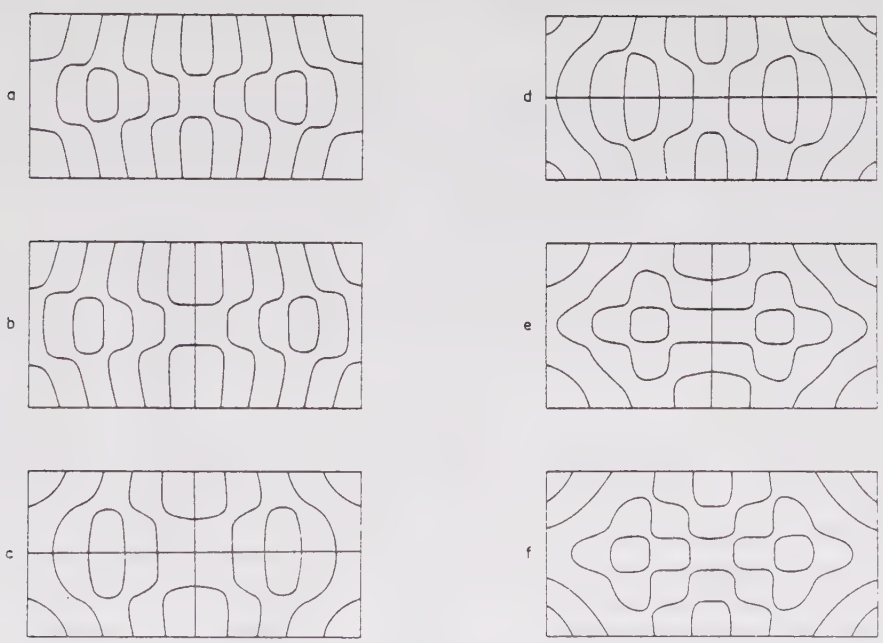


Figure 2
Configuration of the eigenmodes $n = 5$ to $n = 10$ for the rectangle $N_1 = 13$, $N_2 = 26$ with $a_0 h = \pi/4$.

figurations in form of rolls with axis parallel to the shorter side of the cell. This gives us some confidence in our result as this property is a well established fact both experimentally and theoretically. In the following we shall refer to x-rolls when the rolls axis is parallel to $O\,x$ and in a systematic way, the shorter side of the rectangle has been taken along the $O\,x$ axis. As λ increases the configurations become more and more distorted. Fig. 2 (a, b) can be viewed as two systems of x-rolls shifted of half a wavelength and connected near the lines $x = \pm L/3$. In another way, one can say that the lines $x \sim \pm L/3$ are quasi nodal lines for a secondary system of rolls, orthogonal to the primary x-rolls. In the 3-d case the probability for a crossing between two nodal lines is weak, this is why the nodal lines of the secondary rolls do not intersect the nodal lines of the primary rolls at right angle and explain the presence of narrow pass where the velocity is small but not vanishing. The configurations associated with $\lambda^{(7)}$ and $\lambda^{(8)}$ exhibit the same features, the quasi nodal lines being now located near $x = 0$ and $x = \pm L/2$. As for the mode $n = 9$ and 10, one can recognize except in the corners, two systems of interacting orthogonal rolls with approximately the same wavelength.

ii) The large size limit ($L\,a_0 \gg 1$, or $M\,a_0 \gg 1$) including cases c, d, and e which are now successively discussed:

– case c, with $a_0\,h = \pi/2$, we are able to generate a large number of x-rolls in the fundamental mode (Table 3). The negative values of λ in Table 3 have no physical meaning and result from a purely numerical effect (Appendice B) giving rise to a shift of the spectrum toward the bottom when

Table 3

Eigenvalues $\frac{\lambda^{(n)}\,h^4}{9}$ $(n = 1, \ldots, 18)$ for the rectangle $N_1 = 11$, $N_2 = 33$. The asterisk in the last column denotes that there is an envelope node in the bulk. — means that the eigenvectors have not been determined.

n	$\frac{\lambda^{(n)}\,h^4}{9}$	ε_x	ε_y	configuration	m	l
1	−0.1127	+	+	x-rolls	34	0
2	−0.1119	−	+	x-rolls	35	0
3	−0.0715	−	+	x-rolls	35 *	0
4	−0.0685	+	+	x-rolls	34 *	2
5	−0.0591	+	−	x-rolls	34	1
6	−0.0590	−	−	x-rolls	33	1
7	−0.0385	+	−	y-rolls	0	11
8	−0.0327	−	−	y-rolls	1	11
9	−0.0232	+	−	y-rolls	2	11
10	−0.0206	+	+	y-rolls	0	12
11	−0.01727	+	−	x-rolls	35 *	1
12	−0.01723	−	−	x-rolls	32 *	1
13	−0.0144	−	+	y-rolls	1	12
14	−0.0097	−	−	y-rolls	3	11
15	−0.0045	+	+	y-rolls	2	12
16	−0.0035	+	+	—		—
17	0.0032	−	+	—		—
18	0.0075	+	−	—		—

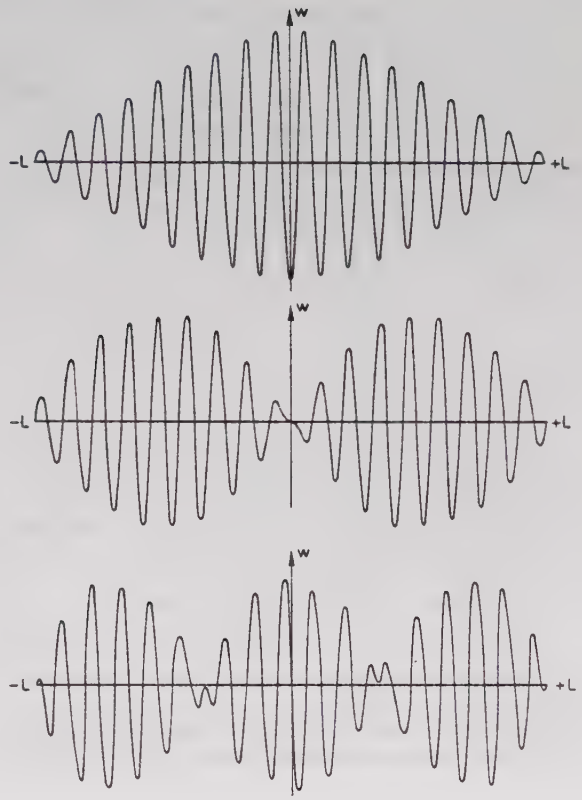


Figure 3
Rectangle $N_1 = 11$, $N_2 = 33$, $a_0 h = \pi/2$. Representation of the velocity w as a function of y for $x = h/2$. a) $n = 1$, b) $n = 4$ there is an envelope node in the bulk, c) $n = 17$ there are two envelope nodes in the bulk.

the mesh length is not small enough to preserve the positivity of all the eigenvalues of (11). As in the one-dimensional case the eigenvalues appear by pair, each member of a pair corresponding, respectively, to odd and even mode about $O\,x$ or $O\,y$. Until $n = 6$ the eigenmodes are x-rolls. For $n > 6$ one observes either x-rolls or y-rolls. For the lowest eigenmode (even and odd) there are nodes in the envelope at boundaries only, although the other eigenmodes have more and more envelope nodes in the bulk (Fig. 3). The main feature of the present results is to show that excited modes always

Table 4
The solution of our model equation in the 1-d case takes the form: $w = A_1 \cos a_1 x + A_2 \cos a_2 x$. We have listed here the quantities Ra, a_1^2, a_2^2 and A_2 ($A_1 = 1$) for $L = 10$ and $n = 1$ to 4. Our results can be compared to the exact numerical results of Drazin.

n	Ra	a_1^2	a_2^2	A_2
1	661.89	5.632	4.236	1.0534
2	675.04	6.330	3.539	−1.0006
3	696.96	7.028	2.841	0.4626
4	727.64	7.726	2.143	−1.836

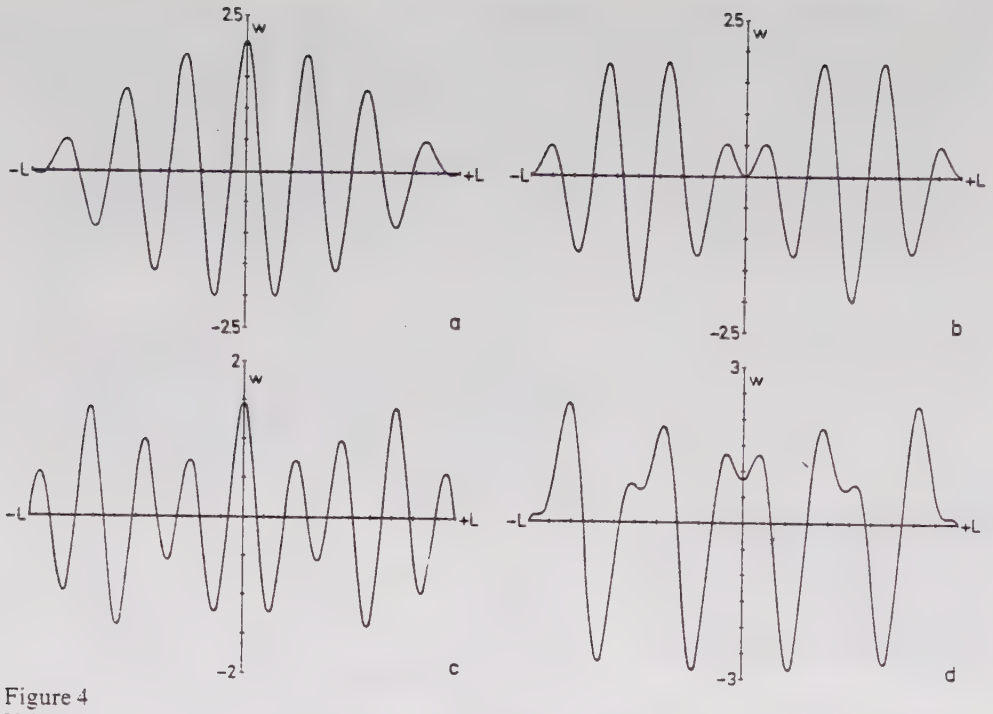


Figure 4
Velocity w as a function of x in the one dimensional case $w = A_1 \cos a_1 x + A_2 \cos a_2 x$ where $A_1 = 1$ and a_1, a_2, A_2 are given in Table 4. a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$, d) $n = 4$.

present a modulation amplitude effect. One guesses that this property is preserved when non linear terms are added to (10). A simple examination of the one-dimensional case shows that except for the lowest eigenvalue, the solutions of the linearized problem also exhibit this modulation effect which can be seen as an interference of two oscillations with slightly different wavenumbers (Fig. 4 and Table 4). Near the instability threshold, this modulation effect can be analyzed in the non linear regime by a two length

Table 5
Eigenvalues $\frac{\lambda^{(n)} h^4}{9}$ $(n = 1, \ldots, 10)$ for the rectangle $N_1 = 10$, $N_2 = 38$.

n	$\frac{\lambda^{(n)} h^4}{9}$	ε_x	ε_y	configuration	m	l
1	0.00474	+	+	x-rolls	18	0
2	0.00478	−	+	x-rolls	17	0
3	0.01052	+	−	x-rolls	16	1
4	0.01068	−	−	x-rolls	17	1
5	0.01461	+	+	Fig. 5 a		
6	0.01476	−	+	Fig. 5 b		
7	0.01856	−	−	Fig. 5 c		
8	0.01924	+	−	Fig. 5 d		
9	0.01987	−	+	Fig. 5 e		
10	0.01993	+	+	Fig. 5 f		

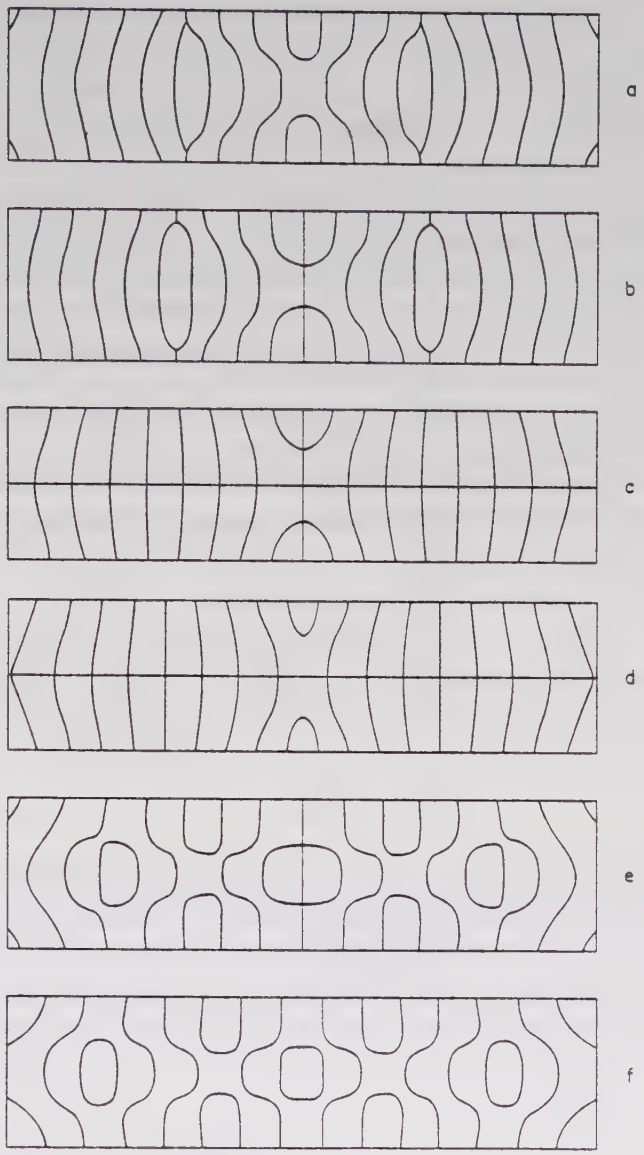


Figure 5
Configuration of the eigenmodes $n = 5$ to $n = 10$ for the rectangle $N_1 = 10$, $N_2 = 38$ with $a_0 h = \pi/4$.

scale approach [4, 12], the equation of the envelope reduces then to a second order non linear partial differential equation in a double well potential.

– cases d and e, the situation is then quite different for the excited modes. The fundamental mode always consists in x-rolls, but in the lowest part of the spectrum listed in Table 5, 6 we never observed transition from x-rolls towards y-rolls as in the previous case. The new feature is that the

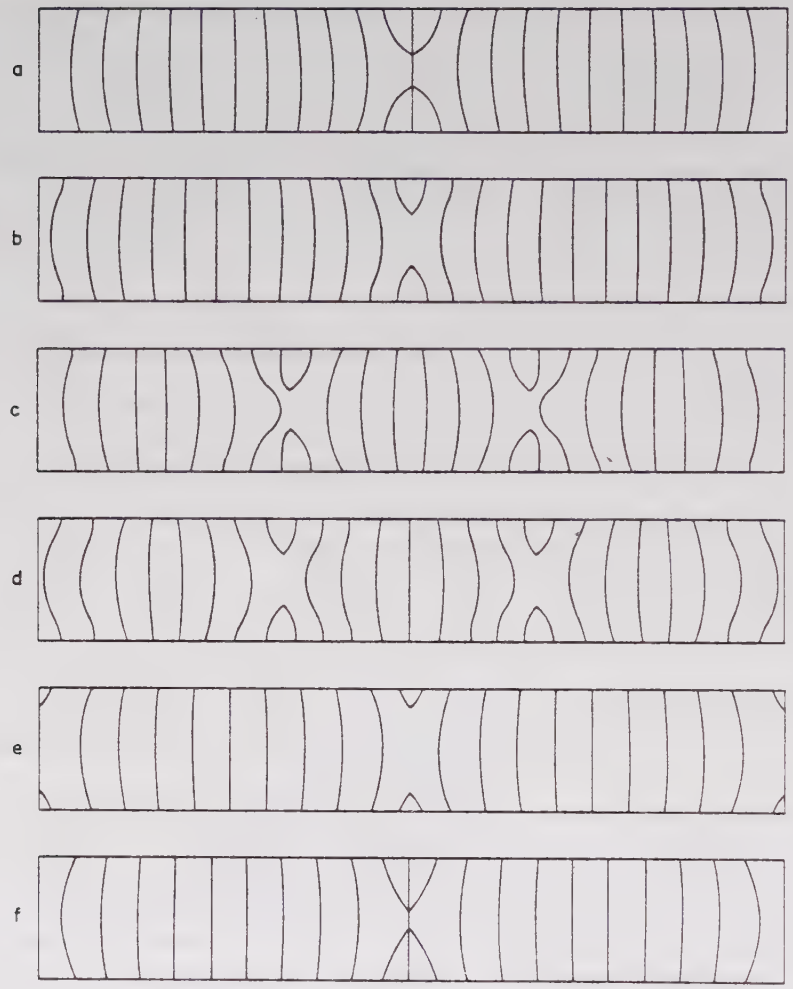


Figure 6
Configuration of the eigenmodes $n = 3, 4, 7, 8, 9, 10$ for the rectangle $N_1 = 8$, $N_2 = 48$ and $a_0 h = \pi/4$.

Table 6
Eigenvalues $\frac{\lambda^{(n)} h^4}{9}$ $(n = 1, \ldots, 10)$ for the rectangle $N_1 = 8$, $N_2 = 48$.

n	$\frac{\lambda^{(n)} h^4}{9}$	ε_x	ε_y	configuration	m	l
1	0.00552	+	+	x-rolls	20	0
2	0.00563	−	+	x-rolls	19	0
3	0.01191	−	+	Fig. 6 a		
4	0.01237	+	+	Fig. 6 b		
5	0.01859	+	−	x-rolls	18	1
6	0.01860	−	−	x-rolls	17	1
7	0.02206	+	+	Fig. 6 c		
8	0.02306	−	+	Fig. 6 d		
9	0.02351	+	−	Fig. 6 e		
10	0.02355	−	−	Fig. 6 f		

excited modes exhibit dislocations, the rest of the structure being made of ordered parallel rolls (Fig. 5 and 6).

Conclusion

Non linear extension of steady solutions with envelope nodes in the bulk are known to be unstable [13] so that we may guess that their occurence in real experiments is very unlikely. However, recent experiments [14, 15] and theoretical work [16] suggest that dislocations may grow spontaneously in cellular flows making them turbulent in some sense. Our numerical results may be seen as supporting these facts and conjectures, since steady states with dislocations exist near the threshold in large boxes, and so are likely to be important in the dynamics of the roll pattern near the onset of instabilities generating distorted as steady configurations when non linearities are accounted for. However, the corresponding non linear analysis remains to be done.

Acknowledgements

I am greatly indebted to Yves Pomeau for help and criticism.

Appendix A

Since the degree of the model differential equation (9) is four instead of six for the original equation (1), one needs only four boundary conditions. The truncated expression for the temperature associated to (8) reads:

$$\theta = 6\left(\frac{A_1 \cos a_1 x}{15\pi^2 + 2\lambda^{1/2}} + \frac{A_2 \cos a_2 x}{15\pi^2 - 2\lambda^{1/2}}\right) \sin \pi z ,$$

which can be expanded in the form:

$$\theta = \frac{2 \sin \pi z}{5\pi^2}\left\{A_1 \cos a_1 x + A_2 \cos a_2 x - \frac{2\lambda^{1/2}}{15\pi^2}(A_1 \cos a_1 x - A_2 \cos a_2 x)\right\} + O(\lambda) .$$

The leading term of this expansion is proportional to the vertical velocity w and satisfaction of:

$$w = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm L ,$$

automatically ensures satisfaction of $\theta = 0$ with an accuracy $O(\lambda^{1/2})$. When the sidewalls are perfectly insulators the condition $\partial\theta/\partial x = 0$ at $x = \pm L$

expresses as:

$$u_x + O(\lambda^{1/2}) = 0 ,$$

and is automatically satisfied with an accuracy $O(\lambda^{1/2})$ if

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm L .$$

The above statement is a trivial case of the matching process described by Daniels [6] in the case of a more complicated thermal boundary condition, namely:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = g(z) \quad \text{at} \quad x = L$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = h(z) \quad \text{at} \quad x = -L .$$

Appendix B

Let us introduce a difference operator [17] K associated with the bidimensional Laplacian operator and defined by:

$$\begin{aligned} K\,w(x, y) = {} & w(x + h, y + h) + w(x + h, y - h) + w(x - h, y + h) \\ & + w(x - h, y - h) + 4\,[w(x + h, y) + w(x - h, y) \\ & + w(x, y + h) + w(x, y - h)] - 20\,w(x, y) . \end{aligned}$$

We shall replace Δ_2 by a formula which is an identity when applied to any polynomial in x and y of degree less than 6 say:

$$6\,h^2\,\Delta_2 = K - \frac{K^2}{72} + O(h^6) .$$

As for the square of the Laplacian it will be replaced by a difference operator X defined by

$$6\,h^4\,\Delta_2^2 = X + O(h^8)$$

which can be pictured by the lozenge [18]:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & -1 & & & \\ & & -1 & 14 & -1 & & \\ & -1 & 20 & -77 & 20 & -1 & \\ -1 & 14 & -77 & 184 & -77 & 14 & -1 \\ & -1 & 20 & -77 & 20 & -1 & \\ & & -1 & 14 & -1 & & \\ & & & -1 & & & \end{array} \qquad \text{(B.1)}$$

Thus equation (9) expresses in terms of a difference equation:

$$\left[\frac{X}{6h^4}+\frac{2a_0^2}{6h^2}\left(K-\frac{K^2}{72}\right)+a_0^4\right] w_{ij}=\frac{\lambda}{9} w_{ij} \tag{B.2}$$

$$i=1,\ldots N_1, \quad j=1,\ldots N_2$$

with

$$X w_{ij}=\sum_{k=-3}^{3}\sum_{l=-3}^{3} a_{kl}\, w_{i+k,\,j+l}$$

where a_{kl} are the coefficients in the lozenge (B.1) ($a_{00}=184$). Similar expressions hold for $K w_{ij}$ and $K^2 w_{ij}$.

Since the differential operator Δ_2^2 has been replaced by a difference operator which is not exactly the square of the difference operator representing the Laplacian one guesses that the positivity of the eigenvalues of equation (10) is not saved in (B.2) for all the values of h. This follows from the special form of the matrix A (11), i.e.:

$$A=A_0+\partial A\,,$$

where A_0 is a positive definite matrice corresponding to the case where the difference operator for Δ^2 is the square of the difference operator for Δ. ∂A is a diagonally dominant matrix such that:

$$|\partial A_{ii}| \gg |\partial A_{ij}| \quad \text{for} \quad j\neq i\,. \tag{B.3}$$

Neglecting the boundary conditions:

$$|\partial A_{ii}| = -\Lambda \;\forall i\,. \tag{B.4}$$

Owing to (B.3) and (B.4), in a first approximation the eigenvalues of A are shifted from those of A_0 by the constant amount Λ. This difficulty is illustrated in Table 3 for $a_0 h=\pi/2$, and where the shift Λ is such that the first seventeen eigenvalues are negative.

References

[1] E. L. Koschmieder and S. G. Pallas, *Heat transfer through a shallow horizontal convecting fluid layer*, Int. J. Heat Mass Transfer, *17*, 991 (1974).

[2] K. Stork and U. Müller, *Convection in boxes: experiments*, J. Fluid Mech., *54*, 599 (1972).

[3] S. H. Davis, *Convection in a Box: Linear theory*, J. Fluid Mech., *30*, 465 (1967).

[4] L. A. Segel, *Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection*, J. Fluid Mech., *38*, 203 (1969).

[5] S. N. Brown and K. Stewartson, *On thermal convection in a large box*, Stud. Appl. Math. *57*, 187 (1977).

[6] P. G. Daniels, *The effect of distant sidewalls on the transition to finite amplitude Bénard convection*, Proc. R. Soc. Lond., *A 358*, 173 (1977).

[7] P. Hall and I. C. Walton, *The smooth transition to a convective regime in a two dimensional box*, Proc. R. Soc. Lond., *A 358*, 199 (1977).

[8] P. Hall and I. C. Walton, *Bénard convection in a finite box: secondary and imperfect bifurcations,* J. Fluid Mech., *90,* 377 (1979).
[9] P. G. Daniels, *Asymptotic sidewall effects in rotating Bénard convection,* Z. angew. Math. Phys. *28,* 577 (1977).
[10] P. G. Drazin, *On the effects of sidewalls on Bénard convection,* Z. angew. Math. Phys. *26,* 239 (1975).
[11] K. Aziz and J. D. Hellums, *Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection,* Phys. Fluids, *10,* 314 (1967).
[12] A. C. Newell and J. A. Whitehead, *Finite bandwidth, finite amplitude convection,* J. Fluid Mech., *38,* 279 (1969).
[13] J. Weisfred et al., *Critical effect in Rayleigh-Bénard convection,* J. de Physique, *39,* 725 (1978).
[14] R. J. Donnelly, K. Park, R. Shaw, and R. W. Walden, *Early nonperiodic transitions in Couette flow,* Phys. Rev. Letters, *44,* 987 (1980).
[15] Swinney et al., Int. Conference on non linear dynamics, New York, dec. 79.
[16] Y. Pomeau and P. Manneville, *Wavelength selection in cellular flows,* Physics Letters, *75 A,* 269 (1980).
[17] W. E. Milne, Numerical solutions of differential equations (Wiley, New York 1960) chap. 8.
[18] M. Abramovitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover publications, New York 1972) Chap. 25.

Abstract

The numerical solution of a model equation give us a qualitative picture of the first convective modes which can be excited in a rectangular box of finite horizontal extent. Some of the configurations in form of ordered parallel rolls exhibit dislocations. Recent experimental and theoretical works suggest that these convective structures play a fundamental role in the occurence of turbulence in large containers.

Résumé

La résolution numérique d'une équation modèle permet d'obtenir une représentation des premiers modes convectifs susceptibles d'être excités dans une boîte rectangulaire de dimensions finies. Parmi les structures convectives que nous obtenons certaines, en forme de rouleaux parallèles présentent des défauts du type dislocation. Certains travaux récents, tant expérimentaux que théoriques nous autorisent à penser que ces configurations jouent un rôle essentiel pour l'établissement de la turbulence dans les boîtes de grandes dimensions.

(Received: May 30, 1980; received: August 4, 1980)

C O N C L U S I O N

Le travail que nous avons présenté dans cette thèse retrace l'évolution de notre compréhension des phénomènes convectifs au cours de ces dernières années.

Notre première contribution à l'étude de la convection se rapporte au régime convectif faiblement non-linéaire en géométrie infinie. Dans ce domaine les solutions des équations d'Oberbeck-Boussinesq ont été obtenues par une méthode perturbative. Notre travail original est d'avoir élargi le champ d'application de cette méthode en tenant compte de conditions aux limites réalistes sur les parois horizontales et en autorisant des variations du nombre d'onde de la structure en rouleaux autour de sa valeur critique. Nos résultats théoriques concernant l'amplitude de la vitesse sont en excellent accord avec les mesures effectuées par P. Bergé et M. Dubois et ont permis de montrer que la méthode perturbative pouvait être appliquée concurremment et même de préférence à la méthode de Galerkin jusqu'à des nombres de Rayleigh assez éloignés du seuil d'instabilité ($Ra \lesssim 7\ Ra_c$). Un autre aspect de notre approche des phénomènes convectifs au voisinage du seuil de convection concerne les effets critiques : ralentissement des fluctuations et divergence des longueurs de cohérence. Ce dernier point nous a conduit naturellement à considérer les effets de taille finie qui résultent du confinement latéral.

Le Chapitre III a été consacré à la revue des résultats acquis en géométrie confinée. La présentation des différentes configurations observées dans les boîtes cylindriques de grand diamètre et de faible épaisseur : rouleaux concentriques, rouleaux parallèles induits, structures désordonnées, débouche sur la description du type de turbulence dite "de basse fréquence". L'influence de la taille du système sur le mode de transition vers la turbulence a été clairement démontré et la turbulence intrinsèque dans les petites boîtes a aussi trouvé place dans ce chapitre.

Notre contribution personnelle à l'étude de la convection en géométrie cylindrique traite le cas où le fluide convectif est de l'eau au voisinage

de son maximum de densité. L'absence de symétrie par rapport au plan horizontal médian du cylindre, lié à la stratification parabolique de densité, joue un rôle primordial, dans l'abaissement du seuil de convection et la structure particulière des modes instables. Nous avons tiré partie de cette dernière propriété pour interpréter l'apparition d'oscillations temporelles lorsque la hauteur du cylindre est grande.

Dans la dernière partie de ce mémoire nous avons obtenu les configurations horizontales permises par la théorie linéaire dans les boîtes rectangulaires de grandes dimensions horizontales. Il est apparu qu'à des nombres de Rayleigh proches du seuil d'instabilité des solutions en forme de rouleaux parallèles, existaient des solutions présentant spontanément des dislocations. L'étude de la dynamique de ces défauts permettra vraisemblablement d'améliorer notre compréhension de la turbulence faible dans les grandes structures.

L'ensemble des résultats que nous avons présenté a nécessité l'emploi de différentes méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles : développement en perturbations, méthode de Galerkin et méthode des différences finies. Ces méthodes fréquemment utilisées en hydrodynamique s'avèrent plus ou moins adaptées à certains types de problèmes et les sujets abordés dans cette thèse illustrent les domaines d'application de ces diverses techniques.

A N N E X E A

Calcul des intégrales $I^{(m)}_{ij\mu\nu}$, m = 1,2,3,4

Lorsqu'on choisit les fonctions d'essai pour la température indépendamment des fonctions d'essai pour la vitesse soit :

$$\theta = \cos n\varphi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} B_{ij}\, \mathscr{C}_{ij}(r,z) \quad , \tag{A1}$$

et

$$v_z = \cos n\varphi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} A_{ij}\, W_{ij}(r,z) \quad , \tag{A2}$$

avec :

$$W_{ij} = \left(\frac{J_n(k_i r)}{J_n(k_i)} - r^n\right)(\lambda^2 - z^2)^2 z^{j-1} \quad , \tag{A3}$$

on a intérêt à prendre :

$$\mathscr{C}_{ij} = J_n(\alpha_i r)(\lambda^2 - z^2) z^{j-1} \quad , \tag{A4}$$

avec :

$$J_n(\alpha_i) = 0 \quad , \tag{A5}$$

lorsque les parois latérales sont conductrices, le seul cas envisagé ici. L'intégrale :

$$I^{(1)}_{ij\mu\nu} = \langle \mathscr{C}_{\mu i} \Delta\, \mathscr{C}_{\nu j} \rangle \tag{A6}$$

se met alors sous la forme :

$$I^{(1)}_{ij\mu\nu} = \lambda^{i+j+1}[-\alpha_\nu^2 \lambda^2\ \mathscr{E}(i+j-2,2) + (j-1)(j-2)\ \mathscr{E}(i+j-4,1) - j(j+1)\ \mathscr{E}(i+j-2,1)]X(\alpha_\mu,\alpha_\nu) \tag{A7}$$

où les quantités $\mathcal{E}(m,n)$ sont les intégrales Eulériennes définies au § IV. 5 et où l'on a introduit la notation :

$$X(\alpha_\mu,\alpha_\nu) \equiv \int_0^1 r\, J_n(\alpha_\mu r) J(\alpha_\nu r) dr \qquad (A8)$$

qui, lorsque $\alpha_\mu \neq \alpha_\nu$, vaut[44] :

$$X(\alpha_\mu,\alpha_\nu) = (\alpha_\nu^2 - \alpha_\mu^2)^{-1} [\alpha_\nu\, J_{n+1}(\alpha_\nu) J_n(\alpha_\mu) - \alpha_\mu\, J_n(\alpha_\nu) J_{n+1}(\alpha_\mu)] \quad . \qquad (A9)$$

Et dans ce cas, compte tenu de (A5) :

$$X(\alpha_\mu,\alpha_\nu) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha_\mu \neq \alpha_\nu \qquad (A10)$$

Si au contraire, $\alpha_\mu = \alpha_\nu = \alpha$, on a :

$$X(\alpha,\alpha) = \frac{|J_n(\alpha)|^2}{2} + \frac{|J_{n+1}(\alpha)|^2}{2} - n\, J_n(\alpha) J_{n+1}(\alpha) \qquad (A11)$$

et compte tenu de A5, il vient :

$$X(\alpha,\alpha) = \frac{1}{2} |J_{n+1}(\alpha)|^2 \quad . \qquad (A12)$$

Nous calculerons maintenant :

$$I^{(2)}_{ij\mu\nu} \equiv \langle \mathcal{E}_{\mu i} W_{\nu j} \rangle \quad , \qquad (A13)$$

qui s'écrit :

$$I^{(2)}_{ij\mu\nu} = \lambda^{i+j+5}\, \mathcal{E}(i+j-2,3) \left[\frac{X(\alpha_\mu,k_\nu)}{J_n(k_\nu)} - Y(\alpha_\mu) \right] \qquad (A14)$$

avec :

$$Y(\alpha_\mu) \equiv \int_0^1 r^{n+1} J_n(\alpha_\mu r)\, dr = \frac{J_{n+1}(\alpha_\mu)}{\alpha_\mu} \quad . \qquad (A15)$$

Compte tenu de (A9) et (A5) la quantité $X(\alpha_\mu, k_\nu)$ est de la forme :

$$X(\alpha_\mu, k_\nu) = \alpha_\mu (\alpha_\mu^2 - k_\nu^2)^{-1} J_n(k_\nu) J_{n+1}(\alpha_\mu) \qquad \text{(A16)}$$

et donc :

$$I^{(2)}_{ij\mu\nu} = \lambda^{i+j+5} \frac{k_\nu^2}{\alpha_\mu (\alpha_\mu^2 - k_\nu^2)} J_{n+1}(\alpha_\mu) \, \mathcal{E}(i+j-2,3) \qquad \text{(A17)}$$

L'intégrale suivante :

$$I^{(3)}_{ij\mu\nu} \equiv \langle W_{\mu i} \left(\frac{z}{\lambda} - 1 \right) \mathcal{C}_{\nu j} \rangle \quad , \qquad \text{(A18)}$$

vaut :

$$I^{(3)}_{ij\mu\nu} = \lambda^{i+j+5} [\mathcal{E}(i+j-1,3) - \mathcal{E}(i+j-2,3)] \frac{k_\nu^2 \, J_{n+1}(\alpha_\mu)}{\alpha_\mu (\alpha_\mu^2 - k_\nu^2)} \qquad \text{(A19)}$$

Il nous reste à calculer :

$$I^{(4)}_{ij\mu\nu} \equiv \langle \vec{v}_{\mu i} . \Delta \vec{v}_{\nu j} \rangle \quad . \qquad \text{(A20)}$$

Pour évaluer cette dernière intégrale nous décomposerons la vitesse et le Laplacien en parties horizontale et verticale, suivant :

$$\vec{v} = v_z \vec{e}_z + \vec{v}_\perp \qquad \text{(A21)}$$

$$\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(A22)}$$

Sachant que :

$$\Delta_2 \vec{v}_\perp = \left[\left(\Delta_2 - \frac{1}{r^2} \right) v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \left[\left(\Delta_2 - \frac{1}{r^2} \right) v_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi \quad , \qquad \text{(A23)}$$

et compte tenu des expressions (70a,b,c) pour les trois composantes de la vitesse, la quantité $I^{(4)}_{ij\mu\nu}$ s'écrit :

$$I^{(4)}_{ij\mu\nu} = \overline{g_i g_j}\, A_{\mu\nu} + \overline{g_i' g_j'}\, B_{\mu\nu} + \overline{g_i' g_j''}\, C_{\mu\nu} \qquad \text{(A24)}$$

avec :

$$A_{\mu\nu} \equiv (u_\mu, \Delta_2 u_\nu) \qquad \text{(A25)}$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \left(w_\mu, \left[\Delta_2 - \frac{1}{r^2}\right] w_\nu\right) + \left(v_\mu, \left[\Delta_2 - \frac{1}{r^2}\right] v_\nu\right) - (u_\mu, u_\nu)$$

$$- 2n \left(\frac{w_\mu v_\nu + w_\nu v_\mu}{r^2}\right) \qquad \text{(A26)}$$

$$C_{\mu\nu} = (w_\mu w_\nu + v_\mu v_\nu) \qquad \text{(A27)}$$

Dans l'expression (A24) les quantités surlignées représentent des intégrales sur la variable z :

$$\overline{g_i g_j} = \int_{-\lambda}^{+\lambda} g_i(z) g_j(z) dz \qquad \text{(A28)}$$

Dans les expressions (A25,26,27) les parenthèses représentent des intégrales sur la variable r :

$$(w_\mu v_\nu) = \int_0^1 r\, w_\mu(r) v_\nu(r) dr \quad . \qquad \text{(A29)}$$

Les trois quantités $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ et $C_{\mu\nu}$ s'expriment en fonction des deux intégrales de base X et Y définies plus haut (A9,15). Ainsi :

$$A_{\mu\nu} = - \frac{k_\nu^2}{J_n(k_\nu)} \left[\frac{X(k_\mu, k_\nu)}{J_n(k_\mu)} - Y(k_\nu)\right] \qquad \text{(A30)}$$

On se servira de la relation transcendante (76) qui définit les coefficients

k, écrite cette fois sous la forme :

$$k\, J_{n+1}(k) = \frac{2n + k^2}{n+2}\, J_n(k) \qquad , \tag{A31}$$

pour exprimer la quantité $X(k_\mu . k_\nu)$ de la façon suivante :

$$X(k_\mu, k_\nu) = \frac{J_n(k_\mu) J_n(k_\nu)}{n+2} \qquad \text{si} \qquad \mu \neq \nu \tag{A32}$$

et dans ce cas ($\mu \neq \nu$) :

$$A_{\mu\nu} = \frac{2n}{n+2} \tag{A33}$$

Au contraire si, $k_\mu = k_\nu = k$, il vient :

$$X(k,k) = \frac{|J_n(k)|^2}{2\, k^2 (n+2)^2} \left[k^4 - k^2(n^2-4n-4) - 4n^2(n+1)\right] \tag{A34}$$

et :

$$A \equiv A_{\mu\mu} = \frac{-k^4 + k^2 n(n-2) + 4n(n^2+2n+2)}{2(n+2)^2} \tag{A35}$$

Pour des raisons de commodité de calcul nous décomposerons la quantité $B_{\mu\nu}$ en trois parties, soit :

$$B_{\mu\nu} = B^{(1)}_{\mu\nu} + B^{(2)}_{\mu\nu} + B^{(3)}_{\mu\nu} \tag{A36}$$

avec :

$$B^{(1)}_{\mu\nu} = \left(w_\mu, \left[\left(\Delta_2 - \frac{1}{r^2}\right) w_\nu - \frac{2n v_\nu}{r^2}\right]\right)$$

$$B^{(2)}_{\mu\nu} = \left(v_\mu, \left[\left(\Delta_2 - \frac{1}{r^2}\right) v_\nu - 2n \frac{w_\nu}{r^2}\right]\right)$$

$$B^{(3)}_{\mu\nu} = (u_\mu, u_\nu)$$

Pour calculer ces quantités on se servira des relations :

$$\Delta_2\left[\frac{dJ_n(kr)}{dr}\right] = \left(-k^2 + \frac{1}{r^2}\right)\frac{dJ_n(kr)}{dr} - \frac{2n^2}{r^3}J_n(kr) \qquad (A37)$$

et :

$$\Delta_2\left[\frac{J_n(kr)}{r}\right] = \left(-k^2 + \frac{1}{r^2}\right)\frac{J_n(kr)}{r} - \frac{2}{r^2}\frac{dJ_n(kr)}{dr} \qquad (A38)$$

On a ainsi :

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{r^2}\right)w_\nu - \frac{2nv_\nu}{r^2} = \frac{n}{k_\nu^2 J_n(k_\nu)}\left[-k_\nu^2\frac{J_n(k_\nu r)}{r} - r^{n-1}D_\nu\right] \qquad (A39)$$

et :

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{r^2}\right)v_\nu - \frac{2nw_\nu}{r^2} = -\frac{1}{k_\nu J_n(k_\nu)}\left[-k_\nu^2 J_n'(k_\nu r) - \frac{n}{k_\nu}D_\nu r^{n-1}\right] \qquad (A40)$$

où l'on a introduit la notation :

$$D_\nu \equiv 2(nJ_n(k_\nu) + k_\nu J_n'(k_\nu)) \qquad (A41)$$

Par la suite on utilisera aussi l'abréviation :

$$JJ \equiv J_n(k_\mu)J_n(k_\nu) \qquad (A42)$$

Il vient :

$$B_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{n^2}{k_\mu^2 k_\nu^2 JJ}\left\{J_n(k_\mu)\left(\frac{D_\nu}{2(n+1)} + k_\nu^2 Y(k_\nu)\right)\right.$$
$$\left. - k_\nu^2\int\frac{dr}{r}J_n(k_\mu r)J_n(k_\nu r) - D_\nu\int J_n(k_\mu r)r^{n-1}dr\right\} \qquad (A43)$$

et :

$$B_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{k_\mu k_\nu JJ}\left\{\frac{nD_\nu J'_n(k_\mu)}{2(n+1)k_\nu} - k_\nu^2 \int r\, J'_n(k_\mu r) J'_n(k_\nu r)dr \right.$$

$$\left. + k_\nu^2\, J'_n(k_\mu) \int r^{n+2} J'_n(k_\nu r)\, dr - \frac{nD_\nu}{k_\nu} \int r^n J'_n(k_\mu r)dr\right\} \qquad (A44)$$

En regroupant ces deux quantités et après intégration par partie des intégrales, on trouve :

$$B_{\mu\nu}^{(1)} + B_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{JJ}\left\{\frac{nD_\nu}{k_\nu^2 k_\mu^2}\left(\frac{D_\mu}{4(n+1)} - J_n(k_\mu)\right) - X(k_\mu,k_\nu)\right.$$

$$\left. + \frac{Y(k_\nu)}{k_\mu^2}\left[n^2 J_n(k_\mu) - (n+2)k_\mu J'_n(k_\mu)\right]\right\} \qquad (A45)$$

Dans l'expression précédente nous éliminerons $J'_n(k)$ au profit de $J_n(k)$ grâce à la relation transcendante (76) mise sous la forme :

$$k\, J'_n(k) = \frac{n^2-k^2}{n+2} \times J_n(k) \qquad (A46)$$

Compte tenu de ce que :

$$B_{\mu\nu}^{(3)} = \frac{X(k_\mu,k_\nu)}{JJ} - \frac{Y(k_\mu)}{J_n(k_\mu)} - \frac{Y(k_\nu)}{J_n(k_\nu)} + \frac{1}{2(n+1)} \qquad (A47)$$

il vient :

$$B_{\mu\nu} = \frac{2n(n+4)(k_\mu^2+k_\nu^2)}{(n+2)^2\, k_\mu^2 k_\nu^2} - \frac{8n^2(n+1)}{(n+2)^2 k_\mu^2 k_\nu^2} - \frac{n^2}{2(n+1)(n+2)^2} \qquad (A48)$$

si $\mu \neq \nu$.

et dans le cas particulier où $k_\nu = k_\mu = k$, on trouve :

$$B \equiv B_{\mu\mu} = \frac{1}{(n+2)^2 k^4}\left[-k^6 + k^4\,\frac{n^2(2n-1)}{2(n+1)} + 4n(n^2+2n+4)k^2 - 8n^2(n+1)\right] \qquad (A49)$$

On terminera par le calcul de $C_{\mu\nu}$ qui s'écrit :

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{k_\mu^2 k_\nu^2}\left[\frac{(n^2-k_\mu^2)(n^2-k_\nu^2)}{2(n+2)^3} + \frac{k_\mu^2+k_\nu^2}{(n+2)} - \frac{3n^2}{2(n+2)}\right. \qquad \text{(A50)}$$
$$\left. + \frac{n^2-k_\nu^2}{n+2} + \frac{k_\nu^2}{JJ}\,X(k_\mu,k_\nu) - k_\nu^2\,\frac{Y(k_\mu)}{J_n(k_\mu)} - k_\mu^2\,\frac{Y(k_\nu)}{J_n(k_\nu)}\right]$$

On distinguera encore les deux cas :

i) $\mu \neq \nu$ avec :

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{k_\mu^2 k_\nu^2 (n+2)}\left[\frac{(n^2-k_\mu^2)(n^2-k_\nu^2)}{2(n+2)^2} - 2n\left(\frac{k_\nu^2}{k_\mu^2}+\frac{k_\mu^2}{k_\nu^2}\right) - \frac{n^2}{2}\right] \qquad \text{(A51)}$$

ii) $k_\mu = k_\nu = k$ et :

$$C \equiv C_{\mu\mu} = \frac{1}{2k^4(n+2)^3}\left[(n+3)k^4 - n(n^2+2n-4) - 4n(n^3+6n^2+11n+8)\right] \qquad \text{(A52)}$$

Les intégrales sur la variable z qui entrent dans l'expression de $I^{(4)}_{ij\mu\nu}$, soit $\overline{g_i g_j}$, $\overline{g_i' g_j'}$ et $\overline{g_i' g_j'''}$ s'expriment en terme d'intégrales Eulériennes :

$$\overline{g_i g_j} = \lambda^{7+i+j}\,\mathcal{E}(i+j-2,4)$$

$$\overline{g_i' g_j'} = \lambda^{5+i+j}[(i-1)(j-1)\,\mathcal{E}(i+j-4,4) - 4(i+j-2)\,\mathcal{E}(i+j-2,3) + 16\,\mathcal{E}(i+j)-2)]$$

$$\overline{g_i' g_j'''} = -\overline{g_i'' g_j''} = \lambda^{3+i+j}\{[(i-1)(i-2)(j-1)(j-2)\,\mathcal{E}(i+j-6,4)$$
$$-4[(i-1)(i-2)(2j-1)+(j-1)(j-2)(2i-1)]\,\mathcal{E}(i+j-4,3)$$
$$+8[(i-1)(i-2)+(j-1)(j-2)+2(2i-1)(2j-1)]\,\mathcal{E}(i+j-2,2)$$
$$-64(i+j-1)\,\mathcal{E}(i+j-1)+64\,\mathcal{E}(i+j+2,0)\}$$

BIBLIOGRAPHIE

(1) Rayleigh (Lord), 1916, *Philos. Mag.* **32**, 529

(2) Normand C., Pomeau Y., Velarde M.G., 1977, *Rev. of Mod. Phys.* **49**, 581

(3) Pellew A., Southwell R.V., 1940, *Proc. R. Soc. Lond.* **A176**, 312

(4) Christopherson D.G., 1940, *Quart. J. Math.* **11**, 63

(5) Gorkov L.P., 1957, *J. Exptl. Theoret. Phys.* **33**, 402 (*Sov. Phys. J.E.T.P.* **6**, 311 (1958))

(6) Malkus W.V.R., Veronis G., 1958, *J. Fluid Mech.* **4**, 225

(7) Landau L.D., 1944, C.R. (Dokl) *Acad. Sci. USSR* **44**, 311

(8) Sorokin V.S., 1954, *Prikl. Mat. i Mekh.* **18**, 197

(9) Dubois M., Bergé P., 1978, *J. Fluid Mech.* **85**, 641

(10) Schlüter A., Lortz D., Busse F., 1965, *J. Fluid Mech.* **23**, 129

(11) Dubois M., Normand C., Bergé P., 1978, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **21**, 999

(12) Busse F.H., 1967, *J. Math. Phys.* **46**, 140

(13) Busse F.H., 1972, *J. Fluid Mech.* **52**, 97

(14) Clever R.M., Busse F.H., 1974, *J. Fluid Mech.* **65**, 625

(15) Eckhauss W., 1965, Studies in Non-linear stability theory *(Springer-Verlag, New-York)*

(16) Busse F.H., 1978, *Report on Progress in Phys.* **41**, 1929

(17) Weisfred J., Pomeau Y., Dubois M., Normand C., Bergé P., *1978, J. de Physique* **39**, 725

(18) Hales A.L., 1937, *Mont. Not. R. Astr. Soc. Geophys. Suppl.* **4**, 122

(19) Catton I., Edwards D.K., 1970, *A.I. Ch. E.*, **16**, 594

(20) Gershuni G.Z. et Zukhovitskii E.M., 1976, *Convective stability of incompressible fluids , Keter Publishing House, Jerusalem.*

(21) Charlson G.S., Sani R.L., 1970, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **13**, 1479

(22) Charlson G.S., Sani R.L., 1971, *Int. J. Heat. Mass Transfer*, **14**, 2157

(23) Ostroumov G.A., Convection dans les conditions de problème interne, Gostekhizdat. 1952, *Engl. Trans. NACA-TM 1958, 1407*

(24) Koschmieder E., 1966, *Beitr. Phys. Atmos.* **39**, 1

(25) Koschmieder E., 1969, *J. Fluid Mech.* **35**, 527

(26) Chen M.M., Whitehead J.A., 1968, *J. Fluid Mech* **31**, 1

(27) Stork K., Müller V., 1975, *J. Fluid Mech.* **71**, 231

(28) Stork K.W., 1974, *Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Karlsruhe, Allemagne*

(29) Croquette V., *Communication privée*

(30) Azouni M.A., *J. of Crystal Growth, 1977, 42, 405*

(31) Azouni M.A., *J. of Crystal Growth, 1979, 47, 109*

(32) Azouni M.A., *Thèse de Doctorat d'Etat, 1979, Paris*

(33) Graham A., 1933, *Phil. Trans. R. Soc. A232, 285*

(34) Palm E., 1960, *J. Fluid Mech. 8, 183*

(35) Palm E., Qiann H., 1964, *J. Fluid Mech., 19, 353*

(36) Palm E., Ellingsen T., Gjevik B., 1967, *J. Fluid Mech. 30, 651*

(37) Chandrasekhar S., 1961, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Clarendon, Oxford)*

(38) Veronis G., 1963, *Astrophys. J., 137, 641*

(39) Krueger E.R., Gross A., Di Prima R.C., 1966, *J. Fluid Mech. 24, 521*

(40) Schechter R.S., Prigogine I., Hamm R., 1972, *Phys. Fluid. 15, 379*

(41) Finlayson A., 1972, The method of Weighted Residuals and variational Principles *(Academic Press)*

(42) Clever R., Catton I., Proceedings of the 1972 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute *edited by B. Landis and G. Hordeman, p. 281*

(43) Kerr A.D., 1968, *Quart. Appl. Math., 26, 219*

(44) Davis S.H., 1967, *J. Fluid Mech. 30, 465*

(45) Bühler K., Kirchartz K.R., Oertel H. Jr., 1979, *Acta Mech. 31, 155*

(46) Segel L.A., 1969, *J. Fluid Mech. 38, 203*

(47) Brown S.N., Stewartson K., 1977, *Stud. Appl. Math. 57, 187*

(48) Newell A.C., Whitehead J.A., 1969, *J. Fluid. Mech. 38, 279*

(49) Dubois M., 1976 , *Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VI*

(50) Krishnamurti R., 1970, *J. Fluid. Mech., 42 (2), 295*

(51) Ahlers G., Behringer R.P., 1978, *Phys. Rev. Lett. 40, 712*

(52) Pomeau Y., Manneville P., 1980, *Phys. Lett., 75A, 296*

(53) Pomeau Y. Manneville P., 1979, *J. de Physique Lett. 40, 609*

(54) Pomeau Y., Manneville P., 1981, Wavelength selection in axisymmetric cellular structures, *soumis au J. de Physique*

(55) Rayleigh J.W.S., 1945, The theory of Sound, p. 370 *(Dover Publication)*

(56) Guazzelli E., 1980, *C.R. Acad. Sc. Paris, 291B, 9*

(57) Guazzelli E., Guyon E., Weisfred J.E., 1981, *Colloque Pierre Curie, Paris.*

(58) Guazzelli E., Guyon E., Weisfred J.E., 1981, *Euromech Colloquium, Karlsruhe*

(59) Donnelly R.J., et al., 1980, *Phys. Rev. Lett.* 44, *987*

(60) Erdélyi et al., Bateman manuscript project, Tome 2, *Higher Transcendental functions, 1953 (Mc Graw-Hill) p. 90*

(61) Ahlers G., Walden R.W., 1980, *Phys. Rev. Lett.* 44, *445*

(62) Libchaber A., Maurer J., 1978, *J. Physique Lett.* 39, *L-369*

(63) Gollub J.P., Benson S.V., 1978, *Phys. Rev. Lett.* 41, *948*

(64) Bergé P., Dubois M., 1979, *J. Physique Lett.* 19, *L505*

(65) Dubois M., Bergé P., 1980, *Phys. Lett.* 76A, *53*

(66) Ruelle D., Takens F., 1971, *Commun. Math. Phys.*, 20, *167*

(67) Maurer J., Libchaber A., 1979, *J. Physique Lett.* 40, *L-419*

(68) Bergé P. et al., 1980, *J. Physique Lett.* 41, *L-341*

(69) Lorenz E.N., 1963, *J. Atmos. Sci.* 20, *130*

(70) Manneville P., Pomeau Y., 1980, *Physica*, D1, *219*